Academia de Ciencias Matemáticas,

Físico–Químicas y Naturales de Granada

El sueño de Pitágoras
De la Aritmética elemental a la Geometría no conmutativa

Discurso leído en el acto de su recepción

como académico numerario por el

Ilmo. Sr. D.

Pascual Jara Martínez

Granada, 2013

Academia de Ciencias Matemáticas,

Físico–Químicas y Naturales de Granada

El sueño de Pitágoras De la Aritmética elemental a la Geometría no conmutativa

Discurso leído en el acto de su recepción

como académico numerario por el

Ilmo. Sr. D.

Pascual Jara Martínez

Granada, 2013

El sueño de Pitágoras
De la Aritmética elemental a la Geometría no conmutativa

El sueño de Pitágoras
De la Aritmética elemental a la Geometría no conmutativa

Pascual Jara Martínez

Excmo. y Magfco. Rector de la Universidad de Granada
Excmo. Sr. Presidente de la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico–Químicas y Naturales
Excmos. e Ilmos. Sra. y Sres. Académicos
Sras. y Sres.

Una Academia de Ciencias, como en la que nos encontramos, se distingue porque todos y cada uno de sus miembros rinde culto y tributo a la Ciencia. Pero, *¿qué es La Ciencia?*

Parece que es comúnmente admitido que "*La Ciencia*" es el conjunto de disciplinas que estudian las leyes que rigen nuestro Universo, que sirve de ayuda para comprender el Mundo, y en cierto modo, para dirigir nuestras acciones en nuestro propio provecho.

Desde los tiempos más remotos el hombre se ha esforzado por conseguir un catálogo de leyes que rijan La Naturaleza y su entorno. En su origen ha sido ésta una labor empírica, y la base de una ciencia primitiva o de una protociencia. La verdadera Ciencia, la ciencia con mayúsculas, nace cuando se comienzan a hacer deducciones e inferencias a partir de estas leyes empíricas, para así obtener predicciones que ayuden al ser humano en su desarrollo.

El hombre pronto observó una cierta regularidad en determinados fenómenos; y fue para entender estas regularidades para lo que comenzó a proponer y desarrollar teorías capaces de explicarlas. Algunas de estas teorías han perdurado en el tiempo hasta nuestros días, y otras, las más, se han mostrado ineficaces y han quedado en el olvido. En este proceso de desarrollo nace una de las ciencias: “*La Matemática*”.

Desde sus inicios La Matemática trata de establecer, de forma precisa:

(1) los conceptos con los que operar y trabajar, estos no son sino los hechos evidentes que ha observado el hombre en la Naturaleza, y

(2) las reglas de inferencia a utilizar para obtener, a partir de ellos, verdades universales.

El arquetipo de esta matemática primitiva es la matemática griega tal y como la concibieron Thales de Mileto (624 a. C. – 547 a. C.) y Pitágoras de Samos (569 a. C. – 475 a. C.). El primero más centrado en la Geometría y en las propiedades de las figuras geométricas, y el segundo tratando de buscar la fundamentación de la Matemática, y hasta del Universo, en el concepto de número.

La Matemática, como cualquier otra actividad humana necesita de actores: *los matemáticos*.

1 ¿Qué es lo que hacen los matemáticos?

Sin duda, si hacemos una encuesta a los transeúntes en la vía pública, obtenemos como respuesta que los matemáticos se dedican a tratar con números, por lo tanto a contar; pero no estaríamos haciendo honor a la verdad, pues los matemáticos se dedican a otros muchos aspectos de la Matemática.

En la Naturaleza muchos animales, amén de los matemáticos, saben contar, si bien no son un prodigio de destreza como la siguiente anécdota, tomada del libro Mathematical Circles, vol. 1 de Howard W. Eves, muestra:

En una granja abandonada vivía una pareja de cuervos. Un día un muchacho entró en ella, provocando que los cuervos huyesen, refugiándose éstos en un árbol próximo. Cuando el muchacho abandonó la granja los cuervos volvieron a su hogar.

Otro día fueron dos los muchachos, los cuervos abandonaron nuevamente el lugar posándose en el árbol; salió un muchacho y los cuervos se mantuvieron en el árbol; sólo al salir el segundo muchacho los cuervos volvieron.

Otro día tres fueron los chicos que entraron en la granja ahu-

yentando a los cuervos; salió el primero y los cuervos permanecieron en el árbol; salió el segundo y lo mismo; cuando salió el tercero los cuervos regresaron. Lo mismo ocurrió cuando fueron cuatro los muchachos.

Un poco inquietos, y llenos de dudas y preguntas, los muchachos, a la sazón científicos en ciernes, llamaron a un quinto amigo. Repitieron el proceso, pero esta vez los cuervos entraron al salir el cuarto. Conclusión, los cuervos cuentan: uno, dos, tres, muchos. Es decir, no distinguen entre el cuatro y el cinco.

Esta forma de contar también es propia de algunas tribus primitivas. En las sociedades humanas pronto se vio la necesidad de contar más allá de tres, fundamentalmente como consecuencia de una actividad humana fundamental: el comercio o el intercambio de productos. Además, el desarrollo del comercio hizo necesaria la escritura y por tanto la grafía de los números: un trazo significaba una unidad; un trazo más grueso o más elaborado, un grupo de unidades; otros trazos significaban a su vez grupos de grupos de unidades. Comienza ahora el matemático a desarrollar su labor: necesita **crear un modelo** en el que se puedan representar los números que usualmente utiliza. Esto es algo que los cuervos de nuestro cuento no han podido aún hacer. En una segunda etapa el matemático deberá ampliar este modelo para poder realizar operaciones elementales como la suma de números enteros positivos o el manejo de fracciones.

Los primeros vestigios de este temprano quehacer matemático se remontan a la época egipcia. El Papiro de Ahmes, o Papiro de Rhind, (1630 a. C.), contiene el siguiente problema: *una cantidad,* *su 1/7, su totalidad asciende a 19.*

¿Qué nos está preguntando el escriba Ahmes? Traducido al lenguaje actual sería: *Una cantidad más 1/7 de la misma suman 19, halla esa cantidad.*

El mismo papiro contiene una solución a este problema: Si se toma como cantidad 7 obtendríamos ($7 + 7/7 = 8$), como tenemos que alcanzar 19, escribimos 19 en términos de 8, esto es,

$$19 = 2 \times 8 + \frac{1}{4} \times 8 + \frac{1}{8} \times 8 = (2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) \times 8.$$

Entonces la solución es $(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) \times 7$. Finalmente en el papiro se comprueba que en efecto ésta es una solución al problema. Observamos que el papiro de Ahmes ya utilizaba el método de la *regula falsi* para resolver problemas aritméticos.

Este es un típico ejemplo del quehacer matemático: **el estudio del modelo como un fin en sí mismo**. Para el escriba que redactó el Papiro de Ahmes las cantidades que maneja no tienen un significado en la vida real; pueden referirse a una pieza de tela; a una extensión de tierra, etc.; son sólo abstracciones: partes inherentes al modelo creado.

Existen muchos otros ejemplos de la civilización egipcia y de otras como la mesopotámica, de la que se ha conservado mayor cantidad de documentos al estar éstos escritos en tablillas de arcilla en vez de en papiros. Veamos un ejemplo encontrado en una de estas tablillas: *halla el lado de un cuadrado para el que su área menos el lado es igual a 14.30. En este caso 14.30 es un número sexagesimal, expresado en base sesenta; la "unidad" es 30, y la "decena" es 14.*

Traducido al lenguaje y sistema de numeración actual de lo que se trata es de resolver la ecuación: $X^2 - X = 870$. Para la resolución de esta ecuación conocemos el algoritmo que nos enseñaron en la escuela.

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 870}}{2} = \frac{1 \pm 59}{2} = \begin{cases} \frac{1+59}{2} = 30 \\ \frac{1-59}{2} = -29 \end{cases}$$

Despreciamos la raíz negativa.

En la tablilla mencionada la resolución, en sexagesimal, es como sigue:

(1) Se calcula un cuadrado próximo a 14.30,00; en este caso se agrega 0,15 que es el cuadrado de la mitad de 1, y se obtiene 14.30,15. (Aquí, por simplicidad, hemos mantenido “,” para separar la parte decimal.)
(2) Se tiene que 14.30,15 es el cuadrado de 29,30. (Esto se conoce, seguramente, haciendo uso de tablas.)
(3) La solución se obtiene sumando a este último número la mitad de 1, que es 0,30, y por tanto el valor del lado es 30,00.

Ni los egipcios ni los mesopotámicos empleaban nuestro sistema de numeración decimal, por lo que todos estos cálculos originalmente tenían una complejidad mucho mayor de la que aquí se señala. El sistema de numeración decimal se introduce en la India y es traído a Europa por los árabes a través de España en el siglo XII. Con su uso se arrumban los sistemas de numeración que habían sido utilizados en Oriente Medio, Grecia, Roma, y en Europa durante la baja Edad Media.

La causa para la introducción de este nuevo sistema de numeración hay que buscarla nuevamente en el desarrollo del comercio producido a partir de los siglos XII y XIII y, por tanto, en la necesidad de manejar grandes números y hacer operaciones con ellos. La generalización en Europa del uso de los números "*indoarábigos*" y del "*sistema decimal de numeración*" se debe en parte a la obra de Leonardo de Pisa (*Fibonacci*), quien en 1202 escribe un manual de Aritmética para este nuevo sistema: *Liber abaci*.

Pero aún serían necesarios dos nuevos inventos para completar el sistema decimal de numeración tal y como lo conocemos hoy en día. Uno es el **cero**, cuya introducción podemos atribuir a Fibonacci, y otro es el uso de **números negativos** y la notación algebraica actual, que se remonta al Renacimiento (Francisco Vieta (1540-1603)).

Debemos reflexionar sobre el largo camino que ha seguido la Humanidad hasta llegar a consolidar el sistema de numeración que actualmente utilizamos; sistema que sólo hacia finales del siglo XVI adopta la forma actual. A este respecto podemos citar la célebre frase de L. Kronecker: "*Dios creó los números naturales, el resto es trabajo del hombre*". En realidad, aunque esto hubiese sido así, creo que a Dios se le olvidó decirle al hombre al principio de la historia, que Él ya había creado los números naturales, porque como hemos observado su descubrimiento le ha llevado a éste un largo periodo de tiempo.

La evolución que tan brevemente hemos descrito de los sistemas de numeración nos lleva a la tercera labor del matemático: **la transferencia tecnológica**. Sin ésta la Matemática quedaría estancada, muerta: sería un erial vacío. Es la necesidad de resolver problemas la que hace posible la modificación de los viejos modelos; su progresiva adaptación, y superación y la aparición de otros nuevos más poderosos y completos.

En resumen, a la pregunta ¿qué hace un matemático? podemos dar como respuesta:

(1) **Crea un modelo abstracto** de un fenómeno físico, social, de la naturaleza o simplemente de alguna parte de la Matemática u otra ciencia.

(2) **Estudia el modelo en sí mismo**, creando nuevos conocimientos mediante la demostración de teoremas y resultados inherentes al mismo.

(3) **Trasfiere estos resultados** a otras ciencias o a la propia Matemática.

Hay en todo este proceso una fuerza vital: la necesidad de conocer, la curiosidad del científico que le lleva a plantearse continuamente nuevos problemas y nuevas cuestiones. Curiosidad provocada en parte por la frustración al saber la imposibilidad real de aplicar cualquier modelo matemático desarrollado para dar solución a los fenómenos estudiados, y en parte por la imperiosa necesidad de tratar de controlar estos fenómenos.

Los tres puntos anteriores son de la mayor relevancia para los matemáticos. Unos abordarán uno de estos puntos, otros dos, raramente algún matemático abordará los tres, y la mayor parte de los matemáticos no abordará nunca ninguno de ellos.

Veamos la siguiente anécdota, atribuida a Pitágoras, que tiene que ver con el punto dos antes mencionado. La escuela pitagórica ansiaba poder desarrollar un sistema basado en la lógica, y describir toda la naturaleza a partir del concepto de número. Un número era un entero positivo: 1, 2, 3, etc., o una fracción de un número entero: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, etc. Como más adelante veremos, la matemática griega era fundamentalmente geométrica. Una unidad era una longitud prefijada, y la acumulación de unidades, o sus partes, los números. Hoy en día es elemental imaginar un cuadrado, como lo es trazar sus diagonales. Y hete aquí que nos encontramos con un número, a la sazón la longitud de la diagonal. Si el cuadrado tiene lado igual a 1, el valor de la diagonal, haciendo uso del Teorema de Pitágoras, es $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Siendo éste un número inconmensurable: no se puede medir. Está claro que el modelo de Pitágoras hace aguas; es necesario pues reformularlo para que dé respuesta al problema que plantean los números incomensurables[1].

¿Cómo solucionar el problema que plantean los incomensurables? Este problema es tratado, con posterioridad a Pitágoras, por Platón[2] en sus Diálogos. Se atribuye a Teodoro de Cire-

[1]De Pitágoras (Samos, 569 a. C. – Metaponto, 475 a. C.) se cuenta que habiendo descubierto que la diagonal de un cuadrado era incomensurable, y dada la pretensión de explicar todo a partir de los números, prohibió a sus discípulos divulgar este hecho; llamando a los números irracionales los números malditos. Uno de sus discípulos, Hippasion, no supo mantener el secreto, lo que le llevó a ser ajusticiado por sus compañeros. Unos dicen que estrangulándolo, otros que enterrándolo vivo, otros que arrojándolo en alta mar para que se ahogase; en todo caso lo que sí es cierto es que Hippasion fue la primera baja en el muy honorable cuerpo de los matemáticos.

Pitágoras trató de llevar sus ideas al terreno político, lo que chocó frontalmente con la autoridad constituida, siendo expulsado de la ciudad (Crotona en Italia); de allí llegó a Metaponto donde se dejó morir de hambre. Las ideas de Pitágoras fueron comunicadas por sus discípulos, y posteriormente introducidas en Atenas por Platón.

[2]Platón (Atenas, 429 a. C. – 347 a. C.)

ne (Cirene, 465 a. C. – 398 a. C.), pitagórico y maestro de Platón, la prueba de la irracionalidad de las raíces cuadradas de los enteros no cuadrados de 2 a 17. Pero para dar una respuesta general se necesitará aún completar el modelo de la Aritmética Elemental. Será necesario introducir los números primos y probar el Teorema de Fundamental de la Aritmética: "*todo número entero positivo es, de forma única, un producto de enteros primos*" [3] [4]. Resultados que aparecen en Euclides.

Sobre el tercer punto de la lista anterior existen multitud de anécdotas. A modo de ejemplo veamos la siguiente atribuida a Thales de Mileto[5].

Un día, cuando aún era pobre, Thales estaba conversando con un amigo, tan pobre como él, que estaba de paso en la ciudad.

— La vida es dura para un hombre pobre en este mundo —dijo el amigo—. Y si uno nace pobre, será pobre toda la vida.

— No necesariamente — repuso Thales. — Estoy seguro de que si se lo propone y si se empeña en ello, un hombre pobre puede convertirse en un hombre rico.

— Esto es más fácil de decir que de hacer — contestó el amigo. — Y no creo en absoluto que eso que dices sea posible llevarlo a la práctica.

— Te digo que — dijo Thales — cuando vuelvas a visitarme dentro de seis meses, te probaré que esto es realmente sencillo. ¡En-

[3] James R. Choike (1980). Theodorus' Irrationality Proofs. The Two-Year College Mathematics Journal.

[4] James Gow (1884). A Short History of Greek Mathematics. University Press.

[5] Thales de Mileto (624 a. C. – 547 a. C.). filósofo, científico, matemático, ingeniero.

tonces seré rico!

Cuando seis meses después el amigo de Thales volvió a visitarlo, se quedó atónito al encontrarse con que Thales era en efecto un hombre rico; más rico que muchos de sus conciudadanos. Por eso le preguntó con gran admiración, ¿cómo has conseguido esta fortuna? A lo que Thales respondió.

— Querido amigo, quiero darte a conocer cómo un hombre pobre puede convertirse en un hombre rico si se dedica a ello con ahínco.

— Muy bien amigo, dime ¿cómo lo has hecho? — respondió el amigo.

— Es muy simple — respondió Thales. Previendo que iba a haber una gran cosecha de aceitunas, compré todas las prensas de la región. Cuando llegó el momento de la recogida y del prensado de la cosecha, yo era el único que disponía de prensas para procesar las aceitunas. Gran parte de mis riquezas provienen del alquiler de las prensas que tan necesarias eran en ese momento. Observa, como te prometí, que es muy fácil hacerse rico si realmente te dedicas a pensar en ello.

2 Euclides. La creación de un modelo abstracto

Es a Platón a quien se debe el primer giro hacia la abstracción y la creación de modelos al plantear que los objetos que estudia la Matemática son objetos ideales, y por lo tanto, no tienen *nada* que ver con los objetos de uso cotidiano. Al vivir estos objetos en un mundo ideal, sus relaciones son también ideales, y por lo tanto alejadas de las posibles perturbaciones ocasionadas por los objetos del mundo real.

Esta forma de pensar la Matemática como la disciplina que estudia objetos ideales ha sido fundamental a lo largo de la Historia de la Humanidad, si bien no ha sido realmente entendida, como vamos a tratar de mostrar, sino hasta tiempos muy recientes con la aparición de las teorías axiomáticas, y con el auge de las estructuras y las distintas modelizaciones de escenarios reales.

En este contexto surge el problema de ¿qué es la verdad matemática? Para entender este concepto tenemos que tener presente donde están los objetos matemáticos y qué son. Al ser objetos ideales la veracidad de una afirmación sólo afecta a éstos. Además, esta veracidad debe ser universal, no sujeta a subjetividades; se suele decir que la verdad en la Matemática no entiende de mayorías. Veremos que existen afirmaciones que son independientes del sistema de axiomas, y que por lo tanto, admitir la veracidad de tales afirmaciones, o de sus contrarias, va a ser una elección subjetiva propia del individuo que desarrolla la teoría, quien obtendrá en cada caso un modelo distinto.

No era ésta, evidentemente, la preocupación de los antiguos matemáticos griegos, más interesados en obtener respuestas del único mundo que conocían y para el que construyeron un único modelo matemático. Antes al contrario, ellos buscaban verdades universales que incorporaban a su modelo como axiomas y principios básicos. Asimismo buscaron las reglas de inferencia necesarias para manejar estos principios básicos. Cabe destacar como elemento decisivo para el desarrollo de esta Matemática que *nunca la comprobación directa de casos particulares ni el que el resultado pareciese evidente, dadas las circunstancias ambientales, sirvieron para determinar la veracidad de una afirmación.* Algo que aún hoy en día nos esforzamos en señalar a aquéllos que se acercan a esta Ciencia.

Un ejemplo de verdad universal en la Matemática es que $\sqrt{2}$ es un número irracional, consecuencia de los principios básicos de la Aritmética de los números naturales. También lo es el teorema de Pitágoras cuando tratamos de la Geometría euclídea; teorema este último que sin embargo no es cierto si trabajamos en una Geometría no euclídea.

En la Matemática los avances son continuos; gran número de matemáticos han trabajado y trabajan en su desarrollo; sin embargo hay momentos en los que una persona o un grupo de personas produce un cambio en el paradigma que condiciona los desarrollos futuros. El primer cambio significativo en este sentido, en la Historia de la Matemática, se debe a Euclides[1].

Euclides establece la Geometría euclídea; modelo de lo que posteriormente será una teoría matemática. Basa la misma en un reducido número de definiciones, postulados y axiomas, a partir de los cuales trata de deducir los resultados o proposiciones de un modelo de geometría compatible con la geometría real que observa. La obra de Euclides se publica en trece libros, y ha sido utilizada en la enseñanza de la Matemática hasta fechas recientes; siendo la obra más editada después de la Biblia. Ha servido de modelo, tanto en Astronomía, en el modelo cosmológico de Johannes Kepler[2], como en la Ética de Spinoza[3], escrita en la forma de definiciones, axiomas, teoremas y corolarios, como en la filosofía del Leviatan de Thomas Hobbes[4].

[1]Euclides de Alejandría (325 a. C.-265 a. C.). Autor de "*Los Elementos*", vivió durante el reinado de Ptolomeo I Soter ("el Salvador").

[2]Johannes Kepler (Weil der Stadt (Alemania), 1571 – Regensburg (Alemania), 1630). Astrónomo alemán que descubrió las leyes del movimiento planetario: (1) los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de los focos; (2) el tiempo necesario para recorrer un arco en la órbita de un planeta es proporcional al área del sector entre el cuerpo central y ese arco; (3) existe una relación entre el cuadrado de los tiempos de los periodos de los planetas y el cubo de los radios de sus órbitas.

[3]Baruch o Benedictus de Spinoza (Amsterdam (Holanda), 1632 – La Haya (Holanda), 1677). Judío de origen sefardí. Autor de Ethica, "Ethica ordine geometrico demonstrata".

[4]Thomas Hobbes (Westport (Inglaterra), 1588 – Hardwick (Inglaterra), 1679). Basa su filosofía en la traslación de las leyes que rigen la geometría y la mecánica a la moral y la política. El hombre es antisocial en estado natural, y tiende a imponerse sobre los demás. Para poder vivir en sociedad el hombre tiene que renunciar a una parte de sus naturales apetencias; para esto debe suscribir un contrato social por el que ceda parte de sus derechos a un soberano que, ahora sí con un poder absoluto no divino, sino que emana de sus súbditos, es el único capaz de mantener en paz la sociedad y hacer respetar el mencionado contrato social.

La obra *Los Elementos de Euclides* se basa en las siguientes definiciones, postulados y axiomas:

Definiciones: descripción de los conceptos con los que se va a trabajar.

DEF–I. Punto, es aquello que no tiene partes.

DEF–II. Línea, es la longitud sin ancho.

DEF–III. Línea recta, es aquella que yace igualmente respecto de sus puntos.

DEF–IV. Superficie, es aquello que tiene tanto largo como ancho.

DEF–V. Superficie plana, es aquella que yace igualmente respecto de sus rectas.

Obsérvese que *punto* se define por exclusión, mientras que *línea* y *superficie*, siguiendo a Platón, son conceptos ideales.

Postulados: establecen las construcciones que están permitidas dentro del sistema que está creando.

POST–I. Dado un punto se puede trazar una recta a cualquier otro punto.

POST–II. Toda recta limitada se puede prolongar indefinidamente.

POST–III. Dado un punto y cualquier distancia, se puede trazar un círculo con centro el punto dado.

POST–IV. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

POST–V. Si una recta que corta a otras dos forma ángulos internos a una misma parte, menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas se cortan en la parte en que los dos ángulos son menores que dos rectos.

Los tres primeros postulados nos permiten construir rectas y círculos; el cuarto podría asegurar la unicidad de la prolongación mencionada en (POST–II). El quinto postulado asegura la existencia de intersección de rectas, y se conoce como postulado de las paralelas. Este postulado, al contrario que los anteriores no parece ser tan evidente; por esto a lo largo de los años los matemáticos han tratado de deducirlo de los restantes postulados y axiomas. Finalmente se probó que era independiente del resto, dando lugar a las geometrías no euclídeas, introducidas en los años veinte el siglo XIX por Janos Bolyai[5], y por Nicolás Lobachevsky[6]. Estos desarrollaron un modelo de geometría en el que el postulado V[7], o de las paralelas, de la geometría euclídea no se verificaba. Esto produjo un cambio radical en la forma de entender la Matemática; a partir de este momento la Matemática es creativa y no está ligada a las realidades físicas. En otra palabras, la Matemática va a construir modelos que, posteriormente, serán de aplicación o no en otras ciencias o en la misma Matemática. La primera consecuencia de este cambio es la fundamentación de la propia Matemática que

[5] Janos Bolyai (Cluj (Rumanía), 1802 – Tirgu-Mures (Rumanía), 1860). Matemático y militar húngaro. El principal aporte consiste en la siguiente aseveración: "*... sea Σ el sistema geométrico basado en la hipótesis de que el Quinto postulado de Euclides es cierto, y sea S el sistema basado en la hipótesis contraria. Todos los teoremas que establecemos sin mencionar explícitamente a los sistemas Σ ó S son teoremas de una geometría absoluta que son independientes de cuando Σ ó S son verdaderos*".

[6] Nikolai Ivanovich Lobachevsky (Gorki (Rusia), 1792 – Kazan (Rusia), 1856). Publica los trabajos "A concise outline of the foundations of geometry" redactado en 1823 y sin publicar; reelaborado posteriormente y publicado en 1829; es el primer trabajo sobre geometría hiperbólica (por un punto exterior a una recta puede pasar más de una paralela). (La geometría elíptica se obtiene cuando por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela.)

[7] El quinto postulado de Euclides tiene muchas formulaciones equivalentes, una de las más populares es: "*Por un punto exterior a una recta sólo cabe trazar una paralela*", o esta otra debida a Adrien M. Legendre: "*Dados tres puntos no alineados, siempre será posible construir una circunferencia que pase por todos ellos*".

hasta ahora hemos tratado.

Axiomas: los principios generales de las ciencias.

AX–I. Dos cosas iguales a una misma son iguales entre sí.

AX–II. Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, las sumas son iguales.

AX–III. Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.

AX–IV. Si a cosas desiguales se añaden cosas iguales, los totales serán desiguales.

AX–V. Los dobles de una misma cosa son iguales entre sí.

AX–VI. Las unidades de una misma cosa son iguales entre sí.

AX–VII. Las cosas que se superponen una a la otra son iguales entre sí.

AX–VIII. El todo es mayor que la parte.

AX–IX. Dos rectas no comprenden un espacio.

Los axiomas (AX–IV), (AX–V), (AX–VI) y (AX-IX) fueron añadidos por autores posteriores.

La Matemática está íntimamente ligada al desarrollo cultural y social, por esto cabe hacer la pregunta de ¿por qué surge una obra como los Elementos en la Grecia del año 300 a. C.? Sin duda la causa hay que buscarla en la sociedad griega. Ésta estaba formada por pequeñas ciudades estado sometidas a un régimen feudal y dedicadas al comercio; es una sociedad exenta de guerras, al contrario que los imperios que la rodean, con una religión antropomorfa en la que los sacerdotes, salvo los del Oráculo de Delfos y algunos otros, no ejercen de intermediarios con los dioses. Los ciudadanos en una sociedad de este tipo se dedican a la especulación y al desarrollo de la filosofía y el razonamiento.

Los precedentes de la obra de Euclides hay que buscarlos en Thales, Pitágoras, Sócrates, Platón, y otros. De Euclides cuenta Arquímedes, que en cierta ocasión el rey Ptolomeo I Soter ("el Grande"), de quién se dice que fue quien encargó a Euclides la redacción de los Elementos, le preguntó si no había un modo más sencillo de aprender Geometría que estudiar los Elementos, a lo que éste contestó: "*No existe un camino real hacia la Geometría*". Sin duda algo que deberíamos aprender todos los que nos dedicamos al estudio de la Ciencia.

La obra de Euclides, aunque ha servido de texto fundamental para la enseñanza de la Matemática en las más prestigiosas universidades hasta finales del siglo XIX, adolece del rigor y la precisión que hoy en día se espera de una obra fundamental en esta disciplina. Se debe a David Hilbert la primera elaboración de una Geometría completamente basada en un sistema de axiomas. La obra de Hilbert aparece en el libro "*Grundlagen der Geometrie*"(Fundamentos de la Geometría) publicado en 1899[8].

[8]David Hilbert (Königsberg (Alemania), 1862 – Göttingen (Alemania), 1943). Una de las pretensiones de Hilbert era, al igual que Pitágoras, basar toda la Matemática en los números (los números naturales).

3 Abel y Galois. Nuevas ideas para la Matemática

Los sistemas de numeración, la fundamentación de la Geometría, ... son ejemplos de cambio de paradigma. Veamos un nuevo ejemplo producido en la Matemática hace tan solo dos siglos. La historia arranca al acabar la Edad Media.

Aunque la evolución de la Matemática no se ha detenido en ninguna época de la Historia, la Edad Media supuso un estancamiento que solo finalizó con el desarrollo del comercio y con la necesidad de establecer sistemas de numeración que pudiesen resolver los problemas que éste planteaba. Como ya hemos señalado, el actual sistema decimal de numeración con cifras indo–arábigas se introdujo en Europa en el siglo XIII; tradicionalmente se atribuye a Fibonacci[1] y a su libro "*Liber abaci*" el haber popularizado este nuevo sistema de numeración que, aunque primitivo, pues no disponía aún de la cifra "cero" ni de los números negativos, resolvía los problemas planteados a los comerciantes y banqueros y estudiaba la resolución de algunas ecuaciones lineales.

[1] Leonardo de Pisa (Fibonacci) (Pisa (Italia), 1170 – 1250) vivió en Argelia, y probablemente allí conoció el sistema decimal que divulgó en Italia publicando en el año 1202, el *Liber abaci*; este libro trata de la resolución de ecuaciones lineales, contiene una colección de supuestos prácticos para uso de comerciantes e introduce la famosa sucesión de Fibonacci.

El desarrollo de esta Aritmética lleva a abordar la resolución de ecuaciones de grados superiores. También es Italia el lugar en el que se produce este nuevo paso significativo en la evolución de la Matemática. Citaremos a tres célebres matemáticos: Nicolo Tartaglia[2], Girolamo Cardano[3] y Ludovico Ferrari[4]. Los intentos de éstos y otros matemáticos de la época por resolver, por radicales, las ecuaciones de grado superior los llevó a tratar el caso de ecuaciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas, quedando abierto el problema de las ecuaciones de grado cinco y superiores.

Es muy importante el desarrollo que dio lugar a esta nueva teoría, y que marca el desarrollo de la Matemática de los siglos XX y XXI. Todo se basa en el hecho de que, dada una ecuación de grado positivo con coeficientes en el cuerpo de los números racionales, existen ciertas simetrías del conjunto de sus raíces. Estas

[2]Nicolo Fontana (Tartaglia) (Brescia (Italia), 1500 – Venecia (Italia), 1557). Era habitual en la época el plantear retos entre matemáticos para probar sus habilidades. En esta ocasión se trata de resolver ecuaciones cúbicas del tipo “incógnita y cubo igual a número” o ecuaciones del tipo “cuadrado y cubo igual a número”; los números negativos no se habían introducido aún. Nicolas del Ferro había determinado la solución al primer tipo, y en su lecho de muerte transmitió este descubrimiento a uno de sus estudiantes Antonio María Fior. En 1535 en un duelo matemático entre Antonio Maria Fior y Tartaglia, el primero planteó al segundo la resolución de trece problemas del tipo “incógnita y cubo igual a primo” en la seguridad de que Tartaglia sería incapaz de superar el reto. Sin embargo en un arranque de lucidez Tartaglia encontró el método general de resolución, superando en el reto a Fior que no pudo resolver los problemas planteados por Tartaglia.

[3]Girolamo Cardano (Pavia (Italia), 1501 – Roma (Italia), 1576). Enterado del duelo entre Fior y Tartaglia, y de la resolución de la cúbica, Cardano entró en contacto con Tartaglia de quien consiguió, bajo la promesa de total confidencialidad el método de resolución de la cúbica. Durante los dos siguientes años trabajó, junto con su discípulo Ferrari en la resolución por radicales de la cúbica y también de la cuártica; publicando en 1545 su obra “Ars Magna” en la que recogía la resolución por radicales de estas ecuaciones, lo que provocó un gran enfado por parte de Tartaglia, quien lo acusó de no haber cumplido con su promesa.

[4]Ludovico Ferrari (Bolonia (Italia), 1522 – 1565). Estudiante de Cardano. Dió la resolución de la cuártica por radicales.

simetrías son exactamente los automorfismos de la extensión de cuerpos $\mathbb{Q}[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]/\mathbb{Q}$ (para $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ las raíces de la ecuación), los cuales, junto con la composición, forman una nueva estructura desconocida hasta ese momento: la de *grupo*. La genialidad, primero de Niels H. Abel[5], y después de Evariste Galois[6] consiste en

[5]Niels Heinrik Abel (Frindöe (Noruega), 1802 – Frolad (Noruega), 1829). Abel nació en Frindöe el 5 de agosto de 1802, y vivió en Gjerestad, un pueblo al sur de Noruega a donde su mudó su familia. Era el segundo de una familia con siete hijos. Su padre fue un pastor luterano y miembro del Parlamento. Hasta los trece años Abel se educó con su familia, momento en el que se incorporó a una escuela en Christiania, a unos 200 kilómetros de su pueblo, en donde rápidamente destacó en Matemáticas. Fue en este época cuando Abel, con la ayuda de su maestro, comenzó a estudiar la obra de los grandes matemáticos: Lacroix, Legendre, Lagrange y Gauss.

Su padre falleció cuando Abel tenía 19 años, viéndose desde entonces obligado a mantener en parte a su familia dando clases particulares de Matemáticas y haciendo otros trabajos. Fué con la ayuda de sus profesores con la que finalmente pudo entrar en la universidad de Christiania. Muy temprano hizo un trabajo en el que probaba la resolución de la quíntica por radicales, sin embargo este trabajo tenía un error, y fue al tratar de corregirlo cuando llegó a la imposibilidad de tal resolución en general; para esta prueba introdujo el concepto de grupo de permutaciones de las raíces; él mismo pagó los gastos de la publicación de este trabajo.

Tras este hecho realizó un viaje por Europa financiado por el gobierno noruego. Era un periodo convulso en Noruega, que se había separado de Dinamarca pasando a formar parte de Suecia y de la que finalmente se independizó. La primera escala del viaje fue a Göttingen a ver a C. F. Gauss, quien al parecer le hizo saber que no estaba interesado en recibirlo. Tras este fracaso conoció a August Leopold Crelle (ingeniero y matemático) en Berlín, y viajó a París. Presentó su trabajo a la Academia, correspondiendo a Legendre (ya mayor) y a Augustin Cauchy, quien extravió los originales, informar sobre él. Fué una época bastante mala pues su situación financiera solo le permitía hacer una comida al día. Tal era la situación de Abel que Crelle lo invitó a viajar a Berlín, pero enfermo y cansado Abel decidió volver a Noruega. El interés de Crelle por el joven matemático lo llevó a encontrarle un puesto en la universidad de Berlín, pero la carta en la que comunicaba la buena nueva llegó dos días después de que Abel muriese de tuberculosis.

Tras la muerte de Abel, las reclamaciones del embajador de Noruega en París hicieron que se encontrase el manuscrito de Abel, a la sazón en poder de Cauchy, y que finalmente pudiese publicarse en 1841. En 1830, un año después de su muerte, la Academia de París el dio el Gran Premio a Abel y Jacobi.

[6]Evariste Galois (Bourg la Reine (Francia), 1811 – Paris (Francia), 1832). Su padre, Nicolas, era un agitador político. La infancia de Galois estuvo marcada por la influencia de su madre Adeleide Marie Demante, quién guió su educación hasta la edad de doce años, ingresando después en el Colegio de Reims y posteriormente en el Liceo Louis-le-

apreciar cómo la raíces de una ecuación dada definen esta nueva estructura, y cómo analizando esta estructura de grupo es posible dar resultados sobre las raíces de la ecuación. Galois observa que además la ecuación es invariante ante todos estos automorfismos,

---

Grand. En esta nueva etapa Galois se muestra como un revolucionario, mereciendo de sus maestros juicios como el siguiente: "*Es dulce, lleno de candor y de buenas cualidades, pero hay algo raro en él*". Como en el caso de Abel, fue un maestro del Liceo quien descubre las aptitudes para la Matemática del joven Galois, quien afirmaba "*la locura matemática domina a este alumno ... sus padres deben dejarle estudiar Matemáticas; aquí pierde el tiempo y todo lo que hace es atormentar a sus profesores y atormentarse a sí mismo*". En este periodo las luchas políticas arrastraron a Galois, y como consecuencia, una institución como el Liceo acabó por expulsar a Galois.

El primer trabajo de Galois es de 1829, y trata sobre fracciones continuas. Ese mismo año envía a la Academia un trabajo sobre la resolución de ecuaciones, siendo Cauchy el encargado de hacer el correspondiente informe. También ese año se suicida su padre, lo que hace caer a Galois en una profunda depresión. Intenta Galois entrar por segunda vez en la école Polytechnique, fracasando nuevamente, no sin tener un fuerte enfrentamiento con los examinadores, calificando de estúpida una pregunta sobre logaritmos y negándose a responderla, protestando contra la pseudociencia de quienes calificó de ganapanes de la enseñanza. Al no poder entrar en la école Polytechnique hizo los exámenes para entrar en la école Normal.

En 1830 envía a la Academia una segunda versión de su trabajo sobre las condiciones para que una ecuación sea soluble por radicales, en el que ya utiliza los resultados de Abel. Otra vez Cauchy es el encargado de recibir el trabajo, quien lo pasa a Fourier, a la sazón secretario de la Academia, quien lo extravía.

Mientras, tanto Carlos X abandona Francia y Galois es animado por Poisson a enviar una nueva versión de su trabajo a la Academia (1931); esta vez Poisson le contesta en el sentido de que el trabajo no está suficientemente claro ni suficientemente desarrollado. La etapa final de la vida de Galois está marcada por el desarrollo político de la Francia de la época y por su activismo en ese periodo, que acaba con un enfrentamiento en un duelo en el que encuentra la muerte. Mucho se ha hablado sobre las causas que llevaron a Galois al duelo; pudieron ser discusiones políticas, o pudo ser culpa de "*una infame coqueta*", como se afirma en una carta atribuida a Galois y fechada el 22 de mayo de 1832 "... Ruego a los patriotas y a mis amigos que no me reprochen por morir por algo que no sea mi país. Muero víctima de una *infame coqueta.* Mi vida se acaba en una miserable pelea. ¡Oh, a qué morir por algo tan trivial, algo tan despreciable!... Perdón para aquellos que me matan, obran de buena fe". En cualquier caso, la noche antes del duelo Galois puso por escrito sus ideas sobre la resolución de ecuaciones por radicales.

Los resultados de E. Galois, recogidos por su hermano y alguno de sus amigos, fueron enviados a matemáticos insignes de la época. Sin embargo, no hay noticias de que hubieran sido tenidos en cuenta. No es hasta 1843 cuando Liouville encuentra estos trabajos y los publica en 1846.

que no son sino las simetrías de la ecuación.

Dado un polinomio irreducible $F \in \mathbb{Q}[X]$ con raíces $\alpha_1, \ldots$, α_n, los automorfismos de $\mathbb{Q}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]/\mathbb{Q}$ forman un grupo: el grupo de simetrías de F con respecto a la composición. Por ejemplo si $F = X^3 - 10$, las raíces son $\alpha_1 = \sqrt[3]{10}$, $\alpha_2 = \omega\sqrt[3]{10}$ y $\alpha_3 = \omega^2\sqrt[3]{10}$, siendo ω una raíz cúbica primitiva de la unidad. Dos de estas raíces son complejas no reales, por lo tanto $\mathbb{Q}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \not\subseteq \mathbb{R}$, y la conjugación compleja es un automorfismo de $\mathbb{Q}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]/\mathbb{Q}$; otros automorfismos se obtienen permutando cíclicamente las tres raíces; se llega a que el grupo de los automorfismos tiene seis elementos y, al no ser conmutativo, es isomorfo a S_3. En el caso en el que las tres raíces de un polinomio son reales, la conjugación es un automorfismo trivial, y por tanto sólo tenemos tres automorfismos.

¿Cómo determinar el grupo de un polinomio irreducible de grado n? Para un polinomio F de este tipo el grupo de simetrías es un subgrupo transitivo de S_n. En este caso de polinomios de grado tres éste es A_3, que tiene tres elementos, ó S_3, que tiene seis. El problema es cómo discriminar entre estos dos grupos simplemente estudiando el polinomio F, esto es, sus coeficientes. Como hemos visto en el caso de grado tres basta considerar el discriminante de F. Si el discriminante es positivo o nulo, el grupo es A_3, y si es negativo, el grupo es S_3.

Para polinomios de grados superiores se reproduce este análisis, si bien ahora es un poco más complejo discriminar entre los posibles grupos: los subgrupos transitivos de S_n. Hoy en día podemos desarrollar algoritmos para ciertos valores de n.

Una vez determinado el grupo de simetrías del polinomio irreducible F, la idea maravillosa de Galois es utilizar éste para determinar todas las soluciones por radicales. Si el grupo en cuestión es G, el cálculo de las raíces es posible cuando podemos encontrar una serie normal abeliana en G: los grupos que así aparecen se llaman grupos solubles. ¿Por qué no es posible resolver por radicales la quíntica? La razón hay que buscarla en los posibles grupos de simetrías: los subgrupos transitivos de S_5. En particular si este grupo es A_5 ó S_5, como estos grupos no tienen una serie normal abeliana, ya que el primero de ellos es un grupo simple, no es posible la resolución, ya que no son grupos solubles.

La importancia de la aproximación realizada por Galois al hacer intervenir una nueva estructura en el estudio de las raíces de una ecuación es de una importancia crucial en el desarrollo de la Matemática del siglo XIX, y por supuesto de los siglos XX y XXI.

La idea de Galois se extiende rápidamente a toda la Matemática; clasificándose las estructuras según sus simetrías. A este respecto cabe destacar el trabajo de Felix Klein[7] sistematizando el estudio de las geometrías a través del estudio de sus grupos de invariantes.

La idea de que las simetrías de un objeto matemático son la base para su clasificación y posterior estudio trasciende rápidamente a la estructura de grupo; llegándose pronto a considerar una estructura más general: la de álgebra.

[7] Felix Klein (Düsseldorf (Alemania), 1849 – Gottingen (Alemania), 1925). Klein desarrolla el Programa de Erlangen en 1872, con motivo de su toma de posesión como profesor en esta universidad; en él establece una Geometría como el estudio de las propiedades de un espacio que quedan invariantes por la acción de un grupo de transformaciones. Se obtiene así una visión unificada de la Geometría, que es el modo actual de estudiar esta disciplina.

4 Cantor y Boole. Los fundamentos

El siglo XIX aportó a la Matemática una cantidad tan inmensa de nuevos conceptos y teorías que ésta escapó al control de los matemáticos. El interés por matematizar/aritmetizar todas las áreas del conocimiento chocó con la falta de fundamentación en las propias teorías matemáticas. Esta deficiencia dio lugar a un gran número de paradojas y de intentos de fundamentar una teoría básica como es la Teoría de conjuntos sobre la que construir todas las demás. Hoy en día conocemos que existen varios sistemas de axiomas que dan lugar a diferentes Teorías de conjuntos.

¿Cómo se llegó a esta situación, y cómo se desarrolló la Matemática para encontrar una solución adecuada?

Todo comienza con el concepto de *conjunto*; definir un conjunto simplemente como una colección de objetos: dando sus elementos explícitamente o dando una propiedad que lo define no es, como más adelante veremos, la manera más adecuada para fundamentar esta teoría, y por ende toda la Matemática.

Es bien conocido el siguiente problema: *En un pueblo hay un barbero que solo afeita a los hombres del pueblo que no se afeitan a sí mismos.* La cuestión a resolver es ¿quién afeita al barbero? Estamos ante una paradoja, ya que si el barbero no se afeita a sí mismo, debe ser afeitado por el barbero, y si se afeita a sí mismo, entonces no debe ser afeitado por el barbero.

¿Cuál es la respuesta a esta pregunta? Es claro que no existe una respuesta que no dé lugar a una contradicción.

Se puede argüir que esta paradoja es propia del lenguaje, y que no afecta a la fundamentación de la Matemática. Es posible que sea ésta la respuesta, y que el problema sea del lenguaje, que es impreciso y pobre. Además existen muchas otras paradojas que se basan directamente en el lenguaje y en las imprecisiones del mismo. Por ejemplo, *¿qué es un montón de arena?* Parece que cada uno de nosotros cree saber cómo definir un montón de arena. Pero detengámonos un momento y consideremos la arena formada por granos. ¿Cuántos granos de arena son necesarios para formar un montón? Parece que un grano no forma un montón, y tampoco dos granos forman un montón, tres granos, ... Podemos concluir que si tenemos n granos que no forman un montón, al añadir un nuevo grano de arena no tendremos un montón. Por el contrario, parece que cien millones de grados de arena (un uno seguido de ocho ceros) sí forman un montón, y que seguiremos teniendo un montón si quitamos un grano, pues parece que 99 999 999 granos de arena sí forman un montón. También tendremos un montón si quitamos un segundo grano. Al igual que antes, podemos concluir que si n granos de arena forman un montón, también $n-1$ granos forman un montón. ¿Es alguien capaz de decidir cuál es el número n que permite dar la categoría de montón a n granos de arena? Parece lógico que el problema es definir con precisión qué es un montón de arena.

¿Estamos otra vez ante una cuestión de lenguaje? Probablemente, pero recordemos que es con el lenguaje con el que tenemos que construir nuestras teorías. Parece por tanto que tenemos que desarrollar un lenguaje lo más neutro y preciso posible que no introduzca indefinición, como en el caso del montón de arena o la paradoja del barbero de nuestro imaginario pueblo.

Tenemos pues que definir con absoluta precisión los objetos con los que estamos trabajando.

Siguiendo a Georg Cantor[1] y a Gottlob Frege[2], hagamos una primera definición de conjunto como una colección de elementos. Para trabajar con conjuntos y elementos vamos a introducir las variables proposicionales; éstas pueden tomar valor verdadero o falso. A partir de éstas introducimos nuevas proposiciones, construidas con las iniciales y con conectores "y", "o" y "no". Dando a éstos un significado similar al de los conectores del lenguaje ordinario, estableceremos su valor verdadero o falso de forma precisa a partir de los valores que toman las variables proposiciones que las forman. El cálculo proposicional fue introducido por George Boole[3] y Augustus de Morgan[4], con el objeto de fundamentar la lógica sobre una base algebraica. De esta forma, y haciendo uso del Álgebra, que hasta el momento sólo había sido usada en Aritmética, diseñan un modelo algebraico de las leyes del pensamiento[5].

[1] Georg Cantor (San Petersburgo (Rusia), 1845 - Halle (Alemania), 1918).
[2] Gottlob Frege (Wismar (Alemania), 1848 - Bad Kleinen (Alemania), 1925).
[3] George Boole (Lincoln (Inglaterra), 1815 - Ballintemple (Irlanda), 1864).
[4] Augustus De Morgan (Madura (India), 1806 - Londres (Inglaterra), 1871).
[5] A partir del cálculo de proposiciones, y mediante las reglas de inferencia que per-

En la construcción de este cálculo proposicional no aparecen paradojas ni contradicciones, por lo que parecería que hemos iniciado un camino correcto y adecuado. Sin embargo pronto se observa que el cálculo proposicional es insuficiente, pues lo que realmente necesitamos para obtener un modelo de las leyes del pensamiento es trabajar con objetos y con propiedades de objetos.

Para resolver este problema y seguir avanzando introducimos los predicados, siendo un predicado una proposición en la que aparecen variables que son moduladas por cuantificadores. Hay dos cuantificadores: "*para todo ... se tiene ...*" y "*existe un ... tal que ...*". Por ejemplo: "*José es un hombre*" es una proposición, y también es una proposición "*José es un mamífero*"; una proposición construida a partir de estas dos es: "*si José es un hombre, entonces José es un mamífero*", y también "*José es un hombre y José no es un mamífero*". En cambio un predicado es utilizar en vez de José una variable modulada por un cuantificador. Un ejemplo es:

$$\forall\, x,\ \text{si } x \text{ es un hombre, entonces } x \text{ es un mamífero.}$$

Otro ejemplo es:

$$\exists\, x \text{ tal que } x \text{ es moreno.}$$

Con los predicados podemos formalizar los silogismos de la lógica de Aristóteles[6], con lo que construimos un método de inferencia

miten incorporar al sistema nuevas proposiciones verdaderas basándonos en otras que lo sean. Los tipos de reglas de inferencia son: (1) *Modus Ponens* $((A \Rightarrow B \ \wedge\ A) \Rightarrow B)$; (2) *Modus Tollens* $((A \Rightarrow B \ \wedge\ \neg B) \Rightarrow \neg A)$; (3) *Modus Tollendo Ponens* $(((A \vee B)\ \wedge\ \neg A) \Rightarrow B)$; (4) *Modus Ponendo Tollens* $(((A \underline{\vee} B)\ \wedge\ A) \Rightarrow \neg B)$.

[6] Aristóteles (Macedonia, 384 a. C. – Chalcis, 322 a. C.).

para deducir resultados nuevos a partir de otros ya probados o admitidos como verdaderos[7]. Tenemos así dentro de esta teoría una formalización de los procesos de razonamiento básicos. A modo de ejemplo veamos el siguiente predicado:

$$\exists\, x,\ \ x \in A \wedge x \in B \Rightarrow (\exists\, x,\ \ x \in A) \wedge (\exists\, x,\ \ x \in B).$$

Aquí empleamos x para un objeto o elemento, y A o B para una propiedad que puede verificar x, y escribiríamos $x \in A$, o puede no verificar, y escribiríamos $x \notin A$.

Siguiendo a Georg Cantor y a Gottlob Frege, nuestra natural ingenuidad, nos puede llevar a definir un conjunto como una colección de objetos que verifican una determinada propiedad o por un predicado. Si hacemos esto estaremos cometiendo un grave error, como prueba la paradoja de Bertrand Russell[8]: "*Para objetos x consideremos la propiedad $x \notin x$; podemos definir el conjunto $X = \{x \mid\ \ x \notin x\}$. Al igual que en la paradoja del barbero, ¿ocurre $X \in X$? o por contra, ¿se tiene $X \notin X$?*"

La siguiente paráfrasis de este ejemplo puede ayudar a comprender mejor el mismo. Se considera una biblioteca formada por libros, y vamos a crear dos nuevos libros para tener un catálogo de toda la biblioteca. El primero contiene un catálogo de todos los libros que se citan a sí mismos, y el segundo contiene un catálogo de todos los libros que no se citan a sí mismos. ¿Qué le ocurre al segundo libro? Si éste aparece citado en el primero, entonces se cita

[7]Hay cuatro tipos de silogismos: (1) Universal afirmativo: Todo A es B. Para todo x, si x es A entonces es B; (2) Universal negativo: Ningún A es B. Para todo x, si x es A entonces no es B; (3) Particular afirmativo: Algún A es B. Existe al menos un x que es A y es B; y (4) Particular negativo: Algún A no es B. Existe al menos un x tal que es A y no es B.

[8]Bertrand Russell (Ravenscroft (Gales), 1872 - Penrhyndeudraeth (Gales), 1970).

a sí mismo, lo que contradice la forma en la que lo hemos creado. Por el contrario, si aparece citado en el segundo, también tenemos una contradicción. ¿Cuál es la conclusión?

Es claro, pues, que necesitamos una teoría formal que evite ésta y otras paradojas que aparecen en teoría de conjuntos.

5 Hilbert. El formalismo

¿Cómo desarrollar una teoría libre de paradojas?

El siglo XIX se inicia con una necesaria ampliación de los sistemas de números. En primer lugar C. F. Gauss[1] introduce las congruencias, de forma que a los sistemas de números: naturales, enteros, racionales, reales y complejos, hay que incorporar aquellos que hoy conocemos como enteros modulares. En segundo lugar E. Galois desarrolla la teoría de ecuaciones algebraicas, haciendo un uso intensivo del sistema de los números complejos, y en particular de las soluciones de las ecuaciones algebraicas resolubles, que pasan a ocupar un lugar desatacado dentro de la Matemática. Con el trabajo de E. Galois toman relevancia las extensiones algebraicas (finitas) del sistema de los números racionales. Es al final de siglo XIX cuando Leopold Kronecker[2] trata de fundamentar todos estos sistemas de números a partir de la aritmética de los números naturales.

La continuidad aparece de forma natural: el sistema de los números racionales no es continuo. Sin embargo existe un continuo en el que está incluido. ¿Cómo construirlo? ¿Cómo dar carta

[1]Carl Friedrich Gauss (Brunswick (Alemania), 1777 - Göttingen (Alemania), 1855).
[2]Leopold Kronecker (Liegnitz (Polonia), 1823 - Berlin (Alemania), 1891).

de naturaleza a números como $\sqrt{2}$ ó π? Es A. L. Cauchy[3] quien da una construcción a partir de los racionales, siendo cada número real el punto de acumulación de una sucesión de números racionales. Otras interpretaciones equivalentes se deben a Richard Dedekind[4]. Es importante señalar que los números reales están dados mediante aproximaciones a los mismos.

Una vez establecidos los sistemas más usuales de números surgen nuevos problemas en sus interrelaciones; pues hay tantos números enteros como naturales, ya que podemos representar aquéllos en una sucesión: $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ Y hay tantos números racionales como números naturales, pues basta considerar los números racionales positivos en una tabla de doble entrada con infinitas filas y columnas como la siguiente:

$$\begin{array}{l}
0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \\
0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\ \ldots \\
0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3},\ \ldots \\
0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \ldots
\end{array}$$

en la que evidentemente aparecen números repetidos, y a continuación escribir todos ellos en una sucesión, utilizando las diagonales secundarias:

$$0, 1, 0, 2, \frac{1}{2}, 0, 3, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, 0, \ldots$$

En consecuencia existen biyecciones entre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$. El siguiente sistema de números es $\mathbb{R}$. ¿Habrá también tantos números reales como números naturales? La respuesta a esta pregunta fue dada

[3] Augustin Louis Cauchy (Paris (Francia), 1789 – 1857).
[4] Richard Dedekind (Braunschweig (Alemania), 1831 – 1916).

por Georg Cantor en sentido negativo, mediante un proceso de reducción al absurdo. En efecto, Georg Cantor supone que podemos escribir todos los números reales en una sucesión; para simplificar vamos sólo a considerar números reales r tales que $0 \leq r < 1$. Escribimos todos estos números en una columna utilizando su representación decimal. Todos tienen parte entera igual a cero. Ahora Cantor construye un nuevo número real que no está en esta sucesión. Para ello toma como primer dígito, de la parte decimal, el que aparece en el primer número al que agregamos una unidad, o 0 si éste es igual a 9. Como segundo dígito tomamos el que aparece en segundo lugar en el segundo número al que agregamos una unidad, o 0 si éste es igual a 9. Y así continuamos para cada posición. El número así construido no está en la sucesión anterior, y en consecuencia $[0, 1)$ no es equipotente con $\mathbb{N}$.

Las clases de equipotencia de los conjuntos definen los números cardinales, y por tanto G. Cantor prueba que $\aleph_0 = \sharp(\mathbb{N}) < \sharp(\mathbb{R}) = c$.

La ciencia, como creación del hombre, es un reflejo del espíritu humano, el cual es dinámico por naturaleza; por esto, cuando se resuelve un problema surgen muchos otros relacionados con él, y también problemas nuevos en el mismo o en otro campo. Es lo que ocurre en este caso. ¿Existirá un número cardinal entre $\aleph_0$ y c? Para cada conjunto X se puede probar que $\sharp(X) < \sharp(P(X)) = 2^{\sharp(X)}$, siendo $P(X)$ el conjunto de las partes de X. ¿Qué relación existe entre $\aleph_0$, c, $2^{\aleph_0}$ y $\aleph_1$, el siguiente cardinal a $\aleph_0$? Los desarrollos teóricos para responder a estas preguntas no son comparables a los esfuerzos realizados hasta ese momento por los matemáticos y lógicos, y van a suponer un nuevo cambio de paradigma en la Matemática del siglo XX.

En esta situación G. Cantor plantea la siguiente hipótesis:

Hipótesis del continuo: *no existe ningún número cardinal d tal que* $\aleph_0 < d < 2^{\aleph_0}$.

Probar o refutar este resultado fue un problema central en la Matemática del cambio de siglo.

Como vemos, la Teoría de conjuntos que hemos utilizado tan alegremente hasta este momento, plantea grandes interrogantes y produce verdaderos problemas a las restantes teorías matemáticas. Fue David Hilbert, en su exposición en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900 en Paris, quien planteó los 23 problemas que a su juicio deberían abordarse a lo largo del siglo XX, y que en efecto han marcado el desarrollo de la Matemática durante el pasado siglo. El primero de estos problemas trata sobre la Hipótesis del continuo, y el segundo sobre la consistencia de la aritmética.

Estos trabajos motivaron a E. Zermelo[5] a abordar el problema de la fundamentación de la Teoría de conjuntos, y en concreto a estudiar la consistencia de la Aritmética. En 1908, siguiendo los trabajos de B. Russell, expone su teoría axiomática de conjuntos fundamentada en el cálculo de predicados. Se basaba ésta en el uso de universos; los cuales se construyen de forma recursiva a partir de uno inicial que únicamente contiene el conjunto vacío. Según este esquema un conjunto será un objeto de alguno de es-

[5] Ernst Zermelo (Berlin (Alemania), 1871 - Freiburg im Breisgau (Alemania), 1953).

tos universos; las paradojas desaparecen al no considerar como conjuntos, en el universo dado, aquéllos que producen paradojas. Veamos un ejemplo. Hemos señalado que a cada conjunto le asociamos su número cardinal, esto es, su clase de equipotencia. Si todos los conjuntos forman un conjunto X, éste tiene asociado un cardinal. Los subconjuntos de X forman también un conjunto, que está contenido en X, luego tenemos $\sharp(X) < \sharp(P(X)) \leq \sharp(X)$, lo que es una contradicción. En consecuencia, todos los conjuntos no pueden formar un conjunto; están en un universo distinto al universo en el que estamos trabajando con conjuntos.

La teoría de conjuntos de E. Zermelo es posteriormente perfilada por otros matemáticos, entre los que destacan: Adolf Fraenkel[6], Thoralf Skolem[7] y John von Neumann[8]. ¿Responde esta teoría a nuestra idea intuitiva de lo que es un conjunto? La respuesta es sí. Sin embargo los axiomas utilizados son, a veces, insuficientes. Por esta razón se considera también una teoría extendida. Ésta consiste en añadir un nuevo axioma; hay tres axiomas que pueden ser considerados naturales dentro de una teoría de conjuntos; son el *Axioma de elección, el principio de buena ordenación* o *axioma de Zermelo* y el *Lema de Zorn*. La bondad de la teoría de Z-F es tal que supuestos sus axiomas estos tres son equivalentes, y juntos definen la teoría de Z-F extendida. Cabe destacar además que son independientes de la teoría de conjuntos de Z-F, esto es, las teorías construidas con ellos o sus negaciones son igualmente válidas.

[6]Adolf Abraham Fraenkel (Munich (Alemania), 1891 - Jerusalem (Israel), 1965).

[7]Thoralf Albert Skolem (Noruega), 1887 - Oslo (Noruega), 1963). Fraenkel y Skolem incrementan el número de axiomas, dado por Zermelo, de siete a diez.

[8]John von Neumann (Budapest (Hungría), 1903 - Washington (EEUU), 1957).

Este ejercicio de quitar y poner axiomas a una teoría no es nuevo en la Matemática; recordemos el caso de las geometrías no euclídeas.

Si de lo que se trata es de buscar modelos, construir éstos formalmente sin dar lugar a contradicciones, y de forma que todos los resultados esperables o válidos en la teoría se puedan probar, tenemos dos aspectos a tratar en las teorías construidas: la *consistencia*: no puede ser cierta en la teoría una afirmación y su contraria, y la *completitud*: toda afirmación se puede probar, o en su defecto, se puede probar su contraria. Si además estas teorías se pueden construir basadas en la aritmética, estaríamos cumpliendo el antiguo sueño de matemáticos como Pitágoras, reavivado por L. Kronecker y posteriormente por D. Hilbert, de fundamentar todo en los números.

En la búsqueda de este objetivo Hilbert, en su "*Grundlagen der Geometrie*"de 1899, como ya hemos citado anteriormente, construye una nueva axiomática de la Geometría euclídea, completando el conjunto de axiomas dado por Euclídes[9], ya que a la luz de los nuevos desarrollos éste se había mostrado falto de algunas evidencias. Por ejemplo M. Pasch[10] había puesto de manifiesto que si se toman cuatro puntos A, B, C y D en una recta de forma que B esté entre A y C, y C esté entre B y D, se espera que B esté entre A y D, algo que no se puede probar utilizando sólo los axiomas de Euclides. Animado por este éxito, Hilbert emprende la tarea antes señalada de fundamentar toda la Matemática en la aritmética.

[9] Euclides (325 a. C. – Alejandría, 265 a. C.).
[10] Moritz Pasch (Breslau (Alemania), 1843 – Bad Homburg (Alemania), 1930).

Como antes señalamos, este programa comienza a tener éxito al construir una Teoría de conjuntos libre de paradojas; el siguiente paso era probar, *internamente*, la consistencia de esta teoría.

Sin embargo, este programa no se pudo llevar a cabo. Kurt Gödel[11] en 1930 prueba que en toda teoría consistente, lo suficientemente potente como para poder definir el concepto de número natural, se puede construir una afirmación tal que ni ella ni su opuesta se pueden demostrar, dentro de la teoría. Prueba pues que toda *teoría* consistente es incompleta. Es evidente que este resultado rompe con el sueño de Hilbert, pues para poder tener teorías completas necesitaremos ampliar el número de axiomas con estas afirmaciones indemostrables.

Un segundo resultado de Kurt Gödel afirma que ningún sistema consistente se puede usar para demostrarse a sí mismo. Por lo tanto no podemos probar la consistencia de la Aritmética, tal y como ésta es concebida por Giuseppe Peano[12]; pero sí podríamos hacerlo si consideramos la Aritmética dentro de la Teoría de conjuntos.

El juego de poner y quitar axiomas a una teoría sirve para dar respuesta al problema de la Hipótesis del continuo. En efecto, Kurt Gödel prueba en 1938 que si a la teoría Z-F extendida se añade la Hipótesis del continuo no surgen contradicciones (es decir, es consistente); lo que da una prueba de que la Hipótesis del continuo no es falsa. Y es en el año 1964 cuando Paul J. Cohen[13]

[11] Kurt Gödel (Brno (Rep. Checa), 1906 – Princeton (EEUU), 1978).

[12] Giuseppe Peano (Cuneo (Italia), 1858 – Turin (Italia) 1932).

[13] Paul Joseph Cohen (Long Branch (EEUU), 1934 – Palo Alto (EEUU), 2007). Fue medalla Fields en 1966.

prueba que ésta hipótesis no es verdadera al probar que si a los axiomas de Z-F extendida se añade la contraria a la Hipótesis del continuo, se tiene también un sistema sin contradicciones. Se tienen, pues, dos posibles teorías de conjuntos, ambas consistentes, y por ende, dos teorías de números reales y de análisis. El problema de Irving Kaplansky[14] es una buena muestra de la diferencia entre ambas, ¿cuál es la correcta?

Vemos que desde un punto de vista formal se observa que la Historia se repite, ya que algo similar ocurría con las geometrías euclídeas y no euclídeas.

¿Cuáles han sido las consecuencias del formalismo? Señalamos a continuación algunas:

(1) Hemos obtenido una clara visión de lo que hoy en día es la Matemática: un cuerpo formado por teorías consistentes, aunque claramente incompletas. Además, para probar la consistencia de una teoría tenemos que considerarla como parte de otra. Otra analogía, esta vez con los universos que manejaba E. Zermelo para formular su teoría de conjuntos: cada universo hay que verlo dentro de otro.

(2) Hemos aprendido que la deducción, las reglas de inferencia permitidas en cada una de las teorías, son fundamentales en el desarrollo de la Matemática y su enseñanza. "*El valor educativo de la Matemática está tanto en sus métodos como en sus*

[14] Irving Kaplansky (Toronto (Canada), 1917 – Los Angeles (EEUU), 2006). La conjetura de Kaplansky dice que toda norma para la que el espacio $C(K)$ de las funciones complejas continuas en un compacto K es un álgebra normada es equivalente a la norma del supremo. Utilizando la Hipótesis del continuo se prueba que la conjetura es falsa, y utilizando la negación de la Hipótesis del continuo se prueba que es cierta.

resultados, siendo la deducción el más importante de sus métodos", afirmaba M. Pasch.

(3) La Matemática queda libre del contexto; puede vagar a su antojo en el campo del conocimiento; está sin ataduras para crear modelos que serán de aplicación o no en otras ciencias y en otras disciplinas. Esto es, se ha llegado al mundo platónico de los ideales.

Esta situación de la Matemática hace recaer en los matemáticos una gran responsabilidad; éstos pueden crear modelos para resolver situaciones y problemas dados, y también con la esperanza de que éstos puedan ser utilizados en un futuro, como nos muestra el ejemplo de la Geometría no euclídea.

6 Bourbaki. El estructuralismo

El trabajo de formalización, que se inicia con la fundamentación de la Teoría de conjuntos, se extiende pronto a toda la Matemática. Entre los matemáticos que han realizado una labor más extensa de formalización destaca Nicolás Bourbaki, que desarrolla su trabajo a lo largo del tercio central del siglo XX. Nicolás Bourbaki [1] es un matemático polifacético y multidisciplinar de excepcional valía, y aunque no se le conocen trabajos destacables ha contribuido enormemente a la estructuración de muchas de las ramas de la Matemática actual.

Según él mismo, el trabajo de N. Bourbaki comienza con el intento de la formalización del Análisis; tarea inmensa para la que no estaba preparada la Matemática de la primera mitad del si-

[1] Nicolas Bourbaki (Universidad Blas Pascal, 1935 –) La inscripción "*Dans cette maison est né le 12 juillet 1935 N. Bourbaki mathématicien*" reza una placa en la fachada de la Estación biológica de la Universidad Blas Pascal, en Besse–en–Chandesee; lugar en el que se reunió por primera vez el grupo. El grupo N. Bourbaki estuvo formado por: Fundadores: Henri Cartan (1904–2008); Premio Wolf 1980, Claude Chevalley (1909–1984), Jean Delsarte (1903–1968), Jean Dieudonné (1906–1992), Charles Ehresmann (1905–1979), André Weil (1906–1998); Premio Wolf 1979, René de Possel (1905–1974). Segunda generación: Laurent Schwartz (1915–2002, Premio Fields 1950), Jean Pierre Serre (1926–). Premios Fields 1954, Wolf 2000 y Abel 2003, Pierre Samuel (1921–2009), Jaen Louis Koszul (1921–), Jacques Dixmier (1924–), Roger Godement (1921–), Samuel Eilenberg (1913–1998); Premio Wolf 1986. Tercera generación: Armand Borel (1923–2003), Alexander Grothendieck (1928 -). Premio Fields 1966, Francois Bruhat (1929–), Pierre Cartier (1932–), Serge Lang (1927–2005), John Tate (1925–); Premio Wolf 2002/3. Cuarta generación: Pierre Deligne (1944–). Premio Fields 1978.

glo XX. Para tratar de alcanzar su objetivo Bourbaki se da cuenta de que primero necesita desarrollar en toda su extensión los conceptos básicos y elementales de la Matemática, en concreto de la Teoría de conjuntos. Tras esta labor hace su aportación más importante a la Matemática, la ciencia y el conocimiento en general: basar todo en la idea de estructura. Podemos observar que la labor de Bourbaki es coetánea al desarrollo del estructuralismo, corriente filosófica que marcó el periodo central del pasado siglo con notable influencia en las ciencias, las ciencias sociales y la lingüística, de la que Bourbaki bebe y a la que indudablemente da un soporte fundamental.

Podemos considerar el estructuralismo como una corriente filosófica que organiza el conocimiento en áreas atendiendo fundamentalmente al significado. Esta corriente se inició en el siglo XX, en el periodo de entreguerras, y aunque los comienzos la pueden situar en ambientes relacionados con la lingüística, como el Círculo de Praga, pronto se extiende a otras ciencias y ramas del conocimiento. Entre los estructuralistas más destacados figuran el antropólogo Claude Lévi–Strauss, el filósofo Michel Foucault ó el psicólogo Jean Piaget, entre otros. En la Matemática, antecesores de este movimiento son Solphus Lie y Arthur Cayley, quien en 1878 escribe "*un grupo se define por la ley de composición de sus elementos*"; dando lugar al nacimiento del concepto de grupo abstracto. También podemos señalar a William Hamilton, quien en 1843 descubre un nuevo sistema de números: los cuaternios; teniendo éstos la peculiaridad de que su producto no es conmutativo.

El estructuralismo alcanza su máxima expresión en la Matemática de la mano de N. Bourbaki y de uno de sus fundadores: André Weil. Fue A. Weil el motor del trabajo de N. Bourbaki y quien inicia el proceso de reformular de forma precisa la Matemática de la primera mitad del siglo XX ante la falta de rigor que los manuales de la época.

La opción elegida por N. Bourbaki hay que enmarcarla en la época: 1934. En su intento de fundamentar el Análisis matemático, los integrantes de Bourbabi optaron por desarrollar las herramientas necesarias: espacios topológicos, espacios vectoriales, y en general estructuras topológicas y algebraicas, lo que les llevó a trabajar sobre conjuntos y a definir sobre ellos las estructuras necesarias: grupo, grupo de Lie, etc. Este desarrollo les llevaría a marcar un nuevo hito en el desarrollo de la Matemática actual: la linealización. En efecto, como se verá rápidamente, el problema de estudiar estructuras en general, y en especial estructuras no conmutativas es complejo y difícil debido a la aparición de expresiones no conmutativas y no lineales; en el caso algebraico se pueden representar los elementos del grupo como matrices sobre cuerpos, trasladando el problema a un problema de álgebra lineal que admite un tratamiento algorítmico. En otros casos se resolverán de forma similar, aunque las estructuras sean topológicas o geométricas.

Hay que insistir en que la labor de N. Bourbaki es fundamental al introducir las estructuras matemáticas como nuevo objeto de estudio, como herramienta, y como hilo conductor en su formalización de la Matemática. El ejemplo más destacado, por su sencillez, es la estructura de grupo, pero no es el único, muchos otros ejemplos aparecen en la Matemática actual: espacio topológico, espacio vectorial, grupo de Lie, variedad diferencial, variedad algebraica, C^*–algebra, espacio de Hilbert, álgebra normada, etc. Gran parte de estas estructuras fueron estudiadas en los "*éléments de Mathématique*".

Es importante señalar que el concepto de estructura no sería de interés si no lo complementamos con tres nociones adicionales:

(1) la noción de homomorfismo y

(2) las nociones de categoría y funtor.

Con esto se tiene una herramienta que permite trasladar un problema de una estructura a otra para abordar su estudio de forma más sencilla; como ocurre en el caso, antes comentado, de grupos y espacios vectoriales.

Como hemos señalado previamente, hay una idea base en el estructuralismo de N. Bourbaki; éste considera estructuras basadas en conjuntos, tal vez movido por la necesidad de realizar una fundamentación de la Teoría de conjuntos o tal vez por el *estado del arte* cuando inicia su trabajo, y que como consecuencia, aparecerá el concepto de homomorfismo como aplicación que permite comparar diversos ejemplos de la misma estructura. Y que la formalización que emprende lo mantiene prisionero, pues no es capaz de incorporar las nuevas ideas y enfoques que continuamente van apareciendo a su prolija obra.

Hoy en día, considerar una estructura como la de espacio topológico, grupo de Lie ó álgebra es natural; en los años treinta del siglo pasado, no. En la actualidad podemos observar que la vasta obra de Bourbaki adolece de esa falta de actualización que debería ser connatural a toda ciencia, y en particular a la Matemática. Y es que en la obra de Bourbaki se echa de menos explorar más y mejor el concepto de categoría y funtor. Mientras que el estudio de una estructura como espacio topológico, restringido a considerar relaciones de un espacio topológico con otros, aporta una gran cantidad de propiedades, éstas quedan más de manifiesto cuando podemos asociar a un espacio otras estructuras que permiten clasificarlo.

Asociados a un espacio topológico tenemos grupos: grupos de homotopía, grupos de homología, etc., que permiten trasladar el estudio de los espacios topológicos al estudio de estas otras estructuras algebraicas. La forma en la que asociamos estas nuevas estructuras es fundamental; tenemos que respetar las relaciones existentes entre espacios topológicos: en particular los diagramas conmutativos; sólo de esta forma podremos estar seguros de que las nuevas estructuras nos darán información suficiente para clasificar espacios. La abstracción entra de nuevo en escena; así los espacios topológicos, junto con las aplicaciones continuas forman un nuevo concepto matemático digno de estudio: el de categoría. Un espacio topológico es un objeto de la categoría de espacios topológicos, y sus propiedades particulares se ponen de manifiesto al interactuar con otros espacios.

Al establecer un funtor de la categoría de espacios topológicos a la categoría de grupos o a la categoría de grupos abelianos, algunas de sus propiedades podrán ser estudiadas en esta nueva categoría, y si el funtor es suficientemente rico, las propiedades estudiadas podrán ser reflejadas de nuevo a la categoría de espacios topológicos.

A mediados del siglo XX dos matemáticos norteamericanos: Samuel Eilenberg (finalmente miembro de Bourbaki) y Saunders MacLane[2] introducen el concepto de categoría para estudiar estructuras y relacionarlas con otras. En este nuevo esquema de pensamiento una categoría $\mathcal{C}$ es un par de clases de objetos: $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$ y $\mathcal{M}of(\mathcal{C})$, verificando ciertos axiomas que tienen que ver fundamentalmente con los homomorfismos que se pueden establecer entre los objetos de $\mathcal{C}$. Así, para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ existe un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \in \mathcal{M}of(\mathcal{C})$; los homomorfismos se pueden componer, y por tanto para tres objetos $A, B, C \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ existe una operación $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$, representada por $(g, f) \mapsto g \circ f$, que verifica la propiedad asociativa. Por otro lado, dado cualquier objeto $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$, existe un único homomorfismo $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, verificando que para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ se dan las igualdades $\mathrm{id}_B \circ f = f$ y $f \circ \mathrm{id}_A = f$. Ejemplos de categorías abundan en todas las ramas de la Matemática: espacios topológicos, grupos, grupos abelianos, conjuntos ordenados, álgebras, etc.

El segundo ingrediente de la teoría está relacionado con la relación entre categorías. Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un homomorfismo de categorías o un funtor es una aplicación entre objetos $F : \mathcal{O}b(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{O}b(\mathcal{D})$ junto con las correspondientes aplicaciones entre morfismos $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ que

[2]Saunders MacLane (Taftville (EEUU), 1909 – San Francisco (EEUU), 2005). Introduce la Teoría de Categorías.

respetan la composición y las identidades.

Con la aparición de la teoría de categorías cambia el concepto de estructura tal y como había sido concebido por Bourbaki: ahora no es necesario un conjunto subyacente sobre el que se va a considerar una estructura adicional: de grupo, espacio topológico, etc. Por ejemplo, un monoide M puede ser considerado como una categoría con un único objeto M, cuyos morfismos son los elementos del monoide. Otro ejemplo de categoría será la definida por un conjunto parcialmente ordenado X; en este caso los objetos son los elementos de X, y dados $x, y \in X$, tenemos que $\mathrm{Hom}_X(x, y)$ tiene un único elemento si $x \leq y$ o es vacío si $x \not\leq y$; la composición se define en la forma obvia.

Veamos qué podemos decir de un ejemplo de estructura como el de las variedades algebraicas: conjuntos de ceros de polinomios. Una variedad algebraica es un objeto geométrico. Dadas dos variedades V y W, una aplicación $V \longrightarrow W$ está definida por un conjunto de polinomios $x \mapsto (F_1(x), \ldots, F_m(x))$, si W está contenido en un espacio de dimensión m. Si el cuerpo base permite resolver cualquier ecuación no trivial, por ejemplo si es igual a $\mathbb{C}$; cada punto del espacio está determinado por los valores que toman en él las funciones polinómicas. Dos funciones son iguales sobre el punto si toman el mismo valor. Si en vez de considerar un punto consideramos una parte C del espacio, podemos seguir el mismo proceso e identificar dos funciones cuando coinciden en C. De esta forma se define un conjunto de polinomios $\mathcal{I}(C) = \{F \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \mid F(c) = 0 \text{ para todo } c \in C\}$, que es un ideal del anillo de polinomios, y permite definir el anillo de coordenadas $\mathbb{C}[C] = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/I(C)$, que representa todas las diferentes funciones que actúan sobre C, identificando aquellas que coinciden sobre C. En este esquema, los conjuntos del espacio que son susceptibles de estudio son los V que son conjuntos de ceros de conjuntos de polinomios: $V = \{x \in \mathbb{A}^n(\mathbb{C}) \mid F(x) = 0 \text{ para todo } F \in I\}$.

Si queremos estudiar una variedad algebraica V, en cierto modo es suficiente estudiar el anillo de coordenadas $K[V]$ asociado, y si queremos estudiar aplicaciones polinómicas $V \longrightarrow W$, bastará estudiar los homomorfismos $K[W] \longrightarrow K[V]$ que son aplicaciones polinómicas. Un estudio más profundo de variedades algebraicas llevará a definir nuevos elementos y nuevos tipos de homomorfismos y sus avatares en el campo algebraico. ¿Cuál es la ventaja de este estudio? En general en el campo geométrico no disponemos de herramientas para realizar un cálculo efectivo; herramientas de las que disponemos en el campo algebraico: técnicas que no necesariamente son lineales. La asociación $V \mapsto K[V]$ es tan buena que permite deducir propiedades geométricas de variedades algebraicas V sin más que estudiar las álgebras $K[V]$.

El concepto de categoría ha impregnado de tal forma la Matemática actual que es imposible entender la misma si no vamos de su mano. Imaginemos la teoría de los espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, y supongamos que nos dicen que pensemos en un espacio vectorial de dimensión n. Inevitablemente nos viene a la cabeza $\mathbb{R}^n$, esto es, de entre los infinitos espacios vectoriales de dimensión n, casi exclusivamente pensamos en uno en concreto. Esto no es un problema, puesto que en casi toda situación en la que existe un espacio vectorial V de dimensión n, podemos sustituir éste por $\mathbb{R}^n$. La razón es simple. Tenemos dos categorías, la de espacios vectoriales V de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y aplicaciones lineales, a la que llamaremos $\mathcal{V}$, y la que tiene por objetos los $\mathbb{R}^n$, en donde n varía en $\mathbb{N}$, y las aplicaciones lineales, a la que llamaremos $\mathcal{W}$. Existe un funtor $F : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}$, que lleva $\mathbb{R}^n$ a sí mismo, y otro funtor $G : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ que lleva cada espacio vectorial de dimensión n a $\mathbb{R}^n$. La composición $G \circ F$ es la identidad, mientras que la composición $F \circ G$ no lo es; sin embargo, para cada espacio vectorial V tenemos un isomorfismo $\nu_V : V \cong (F \circ G)(V) = \mathbb{R}^n$. Las dos categorías $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son "*casi*" isomorfas; diremos que son *categorías equivalentes*, y que ν_V es una transformación natural (isomorfismo natural) de $\mathrm{id}_{\mathcal{V}}$ a $F \circ G$

Podemos aún estudiar otros ejemplos, y me interesa destacar sobremanera una familia de ellos. A lo largo de este discurso ha aparecido la noción de grupo; el estudio de los grupos es sencillo si éstos son abelianos; no ocurre así si los grupos son no abelianos, aunque sean finitos. Como no podemos transformar los grupos en grupos abelianos sin perder gran parte de la información que contienen, las técnicas para su estudio son muy complejas. Vamos a trasladar los problemas de grupos al álgebra Lineal, donde podremos aplicar técnicas de cálculo efectivo. Para esto, dado un cuerpo K consideramos el espacio vectorial con base G, esto es, el conjunto de todas las expresiones $\sum_{g\in G} k_g g$, con $k_g \in K$ casi todos nulos al que llamamos $K[G]$. Damos a $K[G]$ estructura de K–álgebra mediante $(k_g g)(k_h h) = (k_g k_h)gh$, y por distributividad la extendemos a todos los elementos de $K[G]$. Esta asociación es un funtor, $K[-]$, de la categoría de grupos a la categoría de K–álgebras. Podemos aún definir un funtor U de la categoría de K–álgebras a la categoría de grupos asociando a cada K–álgebra A el grupo de los elementos invertibles. También en este caso tenemos una adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}r \arrow[d, shift right, "K[-]"'] \\ K-\mathcal{A}lg \arrow[u, shift right, "U"'] \end{tikzcd}$$

y transformaciones naturales $\varepsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{G}r} \to U \circ K[-]$, y $\delta : K[-] \circ U \longrightarrow K-\mathcal{A}lg$, pero ahora no son isomorfismos de categorías, por lo que el estudio de las K–álgebras nos dará solo alguna información sobre los grupos. Cada homomorfismo f de G a un grupo $GL(n,K)$ produce representaciones de cada elemento de G como un automorfismo de un espacio vectorial de dimensión n. La anterior adjunción nos asegura la existencia de un único homomorfismo de K–álgebra $f' : K[G] \to M(n,K)$ tal que

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varepsilon_G"] \arrow[dr, "f"'] & K[G] \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & M(n,K) \end{tikzcd}$$

Por lo que el estudio de G se puede hacer por métodos lineales.

Como se puede observar, el uso de las categorías permite trasladar el estudio de un problema en un contexto dado a otros contextos en los que posiblemente la resolución se puede abordar de una forma más eficiente. Obsérvese que este es un método empleado tradicionalmente en la Matemática, baste recordar el trabajo de Abel y Galois sobre el estudio de la resolución de ecuaciones polinómicas. Es importante que el método que permite trasladar un problema de un contexto a otro se pueda controlar, esto es, que se mantengan todos los diagramas conmutativos de la categoría origen; el acierto de la teoría de categorías es precisamente la formalización de este método.

7 Ejemplos

Una de las ramas de la Matemática que sin duda ha acumulado mayor desarrollo en el últimos años es la Geometría Algebraica. Según Dieudonné[1], en parte el gran desarrollo de la Matemática griega se debe a que ésta estaba basada en deducciones geométricas, las cuales eran utilizadas como herramientas para la resolución de problemas, tanto geométricos como aritméticos. A modo de ejemplo veamos un problema clásico como es el de la **duplicación del cubo**; esto es, resolver la ecuación: $X^3 = 2a^3$. A falta de una teoría manipulativa se apoyaron en la resolución de la ecuación $X^2 = ab$, la cual en términos geométricos no es más que determinar el lado de un cuadrado de área conocida ab, el cálculo del lado x lo redujeron a determinar una proporción: $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. A continuación, usando una doble proporción, resuelven la ecuación $X^3 = a^2b$ mediante: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$; resolución ésta atribuida a Hipócrates de Chio hacia 420 a. C. Para resolver esta doble proporción se hace uso de la Geometría; se considera una proporción como un lugar geométrico, y para resolver dos proporciones tenemos que realizar la intersección de dos lugares geométricos; este desarrollo es atribuido a Menechmus hacia 350 a. C. En este caso

[1] J. Dieudonné (Lille (Francia), 1906 – Paris (Francia), 1992). Miembro del grupo Nicolas Bourbaki.

particular los lugares geométricos que nos aparecen son:

$$aY = X^2 \quad \text{y} \quad XY = ab$$

Cada solución (x, y) de este sistema da lugar a una solución x del problema original. Este es sólo un ejemplo de las muchas construcciones que se desarrollaron para la resolución de ecuaciones y otros problemas aritméticos y geométricos.

Lo que nos interesa a nosotros poner de manifiesto ahora es el desarrollo y la evolución que ha tenido esta teoría; ya hemos hablado sobre la misma, y de cómo se relacionan conjuntos de puntos de un espacio de dimensión n con conjuntos de polinomios del anillo $K[X_1, \ldots, X_n]$, y también, cuando el cuerpo base es algebraicamente cerrado, de cómo se tiene una buena correspondencia entre conjuntos algebraicos e ideales radicales, que asocia a cada conjunto algebraico V el conjunto de polinomios $\mathcal{I}(V) = \{F \in K[X_1, \ldots, X_n] \mid F(x) = 0 \text{ para cada } x \in V\}$, y a cada ideal $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ el conjunto $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathbb{A}^n(K) \mid F(x) = 0 \text{ para cada } F \in K[X_1, \ldots, X_n]\}$. Debido al hecho de que los puntos corresponden a ideales maximales, el estudio tradicional ha consistido en identificar el conjunto V con el conjunto de los ideales maximales del anillo cociente $K[V] = K[X_1, \ldots, X_n]/\mathcal{I}(V)$.

El problema, pues, consiste en estudiar los puntos de V, o equivalentemente los ideales maximales de $K[V]$. Fueron R. Dedekind[2] y H. Weber[3], quienes a estos puntos, (en realidad a puntos

[2]Richard Dedekind (Braunschweig (Alemania), 1831 – 1916). Introduce en su obra “Vorlesungen über Zahlentheorie”, 1879, la noción de ideal, y en 1882, junto con H. Webber asocia a cada punto de una superficie de Riemann un dominio de valoración discreta y como aplicación da una demostración del Teorema de Riemann–Roch.

[3]Heinrich Weber (Heidelberg (Alemania), 1842 – Strasbourg (Alemania), 1913).

de una superficie de Riemann), asocian anillos de forma que si el punto es regular, el anillo asociado resulta ser un dominio de valoración discreta. El problema es ver qué ocurre al tratar un conjunto algebraico genérico, esto es, qué pasa con los puntos singulares. Pronto se pone de manifiesto que únicamente el estudio de los ideales maximales (los puntos) no es suficiente para determinar la estructura del conjunto algebraico, pues las posibles relaciones entre los puntos no se ponen de manifiesto.

Hay que esperar aún casi cincuenta años para que se desarrollen: la teoría abstracta de invariantes; anillos de polinomios y descomposición de ideales; puntos genéricos y multiplicidades de intersección, etc., y para que de nuevo se ponga de manifiesto la importancia que tienen los espacios proyectivos como espacios ambiente para esta geometría. En este escenario O. Zariski[4] en 1942, siguiendo las ideas de Dedekind y Webber define en el conjunto de todos los ideales primos, no sólo de los ideales maximales, una topología, que por cierto no es Hausdorff, y que le permite asociar a cada punto un anillo tal y como habían hecho Dedekind y Webber. Lo importante es cómo pasar de considerar sólo los puntos a pasar a considerar todos los ideales primos; identificando éstos a su vez con conjuntos algebraicos irreducibles. Tenemos un nuevo nivel de abstracción; ya que ahora identificaremos un conjunto algebraico V, dotado con la topología cuyos cerrados son los subconjuntos algebraicos, con el espacio topológico definido sobre el espectro primo de $K[V]$ con la topología de Zariski. A cada abierto del espectro primo le asociamos un anillo; asociación

[4]Oscar Zariski (Kobrin (Rusia), 1899 – Brookline (EEUU), 1986).

que es compatible con la topología, y de forma que en cada punto $\mathfrak{p}$ (no necesariamente un ideal maximal) la fibra es el localizado de $K[V]$ en el ideal $\mathfrak{p}$.

La extensión natural es considerar un anillo conmutativo A y hacer de nuevo todo el proceso: definir el espectro, la topología, el haz estructura y determinar las fibras; nace así el concepto de variedad abstracta y el de haz sobre una variedad abstracta, introducido por A. Weil[5] en 1950 y J. P. Serre[6] en 1955, ambos miembros del grupo Bourbaki; obteniéndose los espacios anillados. Ya en este contexto abstracto O. Zariski prueba que en estas nuevas variedades abstractas las fibras (los anillos locales) tienen propiedades análogas a las de los gérmenes de función de las variedades complejas; permitiendo así el desarrollo de la teoría sobre cuerpos y anillos arbitrarios; lo que ha posibilitado su aplicación a nuevos problemas en todos los campos de la Matemática.

Con este desarrollo, y teniendo en cuenta que la asociación $V \mapsto K[V]$ define una equivalencia entre la categoría de los conjuntos algebraicos (afines), y la categoría opuesta de la categoría de K–álgebras afines (finitamente generadas) reducidas, se abren nuevas perspectivas que permiten definir objetos geométricos partiendo de categorías dadas. Es A. Grothendieck[7], el principal impulsor de esta nueva forma de entender la Matemática.

Dentro de este contexto, uno de los problemas actuales es la

[5] André Weil (Paris (Francia), 1906 – Princeton (EEUU), 1998). Fundador del grupo Nicolas Bourbaki.

[6] Jean Pierre Serre (Bages (Francia), 1926). Miembro de la segunda generación del grupo Nicolas Bourbaki.

[7] Alexander Grothendieck (Berlin (Alemania), 1928). Miembro de la tercera generación del grupo Nicolas Bourbaki.

definición de nuevos espacios que reflejen la no conmutatividad de algunas teorías. Una forma de introducirnos en este mundo no conmutativo es el considerar modelos simples mediante la identificación $V \mapsto K[V]$. De entre estos modelos, uno sencillo se obtiene al considerar el espacio asociado a un anillo no conmutativo de polinomios del tipo $K_q[X, Y]$, en donde $q \in K \setminus \{0\}$ es una constante, y en el que la multiplicación está definida por $YX = qXY$; reflejando así la no conmutatividad. ¿Representa $K_q[X, Y]$ un espacio geométrico? Con las ideas antes desarrolladas es claro que sí. En este nuevo esquema el desarrollo y estudio de estos ejemplos podrá arrojar luz sobre algunas aplicaciones teóricas de la Matemática actualmente en estudio.

Quiero finalizar este apartado dedicado a mostrar algunos ejemplos con una referencia a otra aproximación a la Geometría no conmutativa en la que el profesor J. L. Bueso, mi *padrino* en este acto de entrada a la Academia, ha tenido también una participación destacada. Se trata de la teoría de haz estructura sobre anillos no necesariamente conmutativos, la cual permite la construcción de nuevos modelos no conmutativos de espacios geométricos.

Esta teoría es una aproximación a espacios en los que los puntos no son uniformes; el concepto de punto es esencial en cualquier desarrollo de modelos geométricos. En efecto, en las aproximaciones a los espacios geométricos abstractos que se han realizado, los objetos geométricos irreducibles, en particular los puntos, se identifican con ideales primos que son a su vez puntos del espectro del anillo. En el caso conmutativo podemos considerar la fibra en cada ideal primo como una localización. Al trasladar esta teoría al caso no conmutativo nos encontramos con el hecho singular de que existen anillos no conmutativos en los que algunos puntos (ideales primos) no se pueden distinguir mediante técnicas de localización; intuitivamente esto significa que allí donde vaya uno, siempre le debe de acompañar el otro. Esto es debido a que al hacer fracciones con respecto a uno de los ideales primos, $\mathfrak{p}$, necesariamente tenemos que hacer fracciones con respecto al otro, $\mathfrak{q}$. Diremos que en este caso existe un enlace entre $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$. De esta forma los puntos del espectro tienen relaciones nuevas que no aparecen en el caso conmutativo. Tenemos un grafo con vértices los puntos del espectro y lados los enlaces que antes hemos mencionado.

Esta situación nos permite plantear un nuevo modelo geométrico cuyos puntos son los conjuntos de ideales primos entre los que existen enlaces; obteniéndose para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ su camarilla ("*clique*" en inglés), y en consecuencia una partición del espectro en camarillas. Es de interés señalar que esta idea del espacio constituido por puntos que son a su vez cliques tiene un fundamento teórico fuerte, que permite la construcción de espacios anillados y haz estructura sobre los mismos; ver (6). Por otro lado esta idea es también compatible con nuevas interpretaciones del concepto de punto llevadas a cabo recientemente; ver (7).

8 Agradecimientos

Finalmente quiero agradecer a los Miembros de la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico–Químicas y Naturales de Granada por haber confiado y haberme aceptado como Miembro Numerario de esta Magnífica Institución; espero estar a la altura de las circunstancias y de la confianza que han depositado en mí.

Quiero agradecer a los amigos que han acudido hoy a la lectura de este discurso de entrada en la Academia su paciencia durante el tiempo que ha durado el mismo; espero haber sabido transmitir cual es mi forma de entender la Matemática.

Quiero agradecer a mis padres el esfuerzo que dedicaron desde siempre para hacerme comprender que el trabajo es la única fuerza que mueve el mundo.

Y finalizar con unas palabras atribuidas a Carl Sagan para mostrar la universalidad de la Matemática. Pensad por un momento que vais a entrar en contacto con una civilización avanzada, posiblemente extraterrestre, de la que ignoráis absolutamente todo. Si nos ponemos a pensar, prácticamente el único símbolo de inteligencia que podríamos utilizar en una hipotética comunicación serían los números. Cualquier sucesión de números sería adecuada; sin embargo, listas como la siguiente 2, 3, 5, 7, 11, 13,

. . . , demuestran que disponemos de una inteligencia superior. En el fondo como creía Pitágoras: ¡La Naturaleza está construida sobre los números!

Bibliografía

[1] ACZEL, A. D., El artista y el matemático. Gedisa, 2009.

[2] ASHURST, F. G., Fundadores de las matemáticas modernas. Alianza, 1982.

[3] BELL, E. T., Historia de las matemáticas. Fondo de cultura económica, 1985.

[4] BOURBAKI, N., The architecture of matehmatics. The Amer. Math. Monthly, **57** (1950), 221–232.

[5] BOURBAKI, N., Elementos de historia de las matemáticas. Alianza, 1972.

[6] BUESO, J. L., JARA, P., VERSCHOREN, A., Compatibility, stability and sheaves. Marcel–Dekker, 1995. 7

[7] CARTIER, P., A mad day's work: From Grothendieck to Connes and Kontsevich, the evolution of concepts of space and symmetry. Bull. Amer. Math. Soc., **38** (2001), 389–408. 7

[8] CLARK, C., The author who never was: Nicolas Bourbaki. Science, **28** (2005), 82–86.

[9] CORBALÁN, F., Galois. Revolución y matemáticas. Nivola, 2000.

[10] COURANT, R., ROBBINS, H., What is mathematics?. An elementary approach to ideas and methods. Oxford Univ. Press, 1978.

[11] DE GUZMAN, M., Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos. Pirámide, 1997.

[12] DIEUDONNÉ, J., History of algebraic geometry. Wadsworth, 1985.

[13] DOU, A., Fundamentos de la matemática. Labor, 1974.

[14] DU SAUTOY, M., The music of the primes. Searchng to solve the greatest mystery of mathematics, Harper Collins Pub., 2003.

[15] DU SAUTOY, M., La música de los números primos. Acantilado, 2007.

[16] FRESÁN, J., Hasta que el álgebra nos separe. RBA, 2011.

[17] HARDY, G. H., Autojustificación de un matemático. Ariel, 1981.

[18] HILBERT, D., ACKERMANN, W., Elementos de lógica teórica. Tecnos, 1975.

[19] KLINE, M., El fracaso de la matemática moderna. Siglo XXI, 1981.

[20] KORNER, S., Introducción a la filosofía de la matemática. Siglo XXI, 1977.

[21] LELIONNAIS, F. Y COLABORADORES, Las grandes corrientes del pensamiento matemático. EUDEBA, 1962.

[22] LORENZO, J. DE, Poincaré. Matemático visionario, politécnico escéptico. Nivola, 2009

[23] MATAIX, M., Esbozos bibliográficos y pasatiempos matemáticos. Marcombo, 1993.

[24] MARTÍN CASALDERREY, F., Cardano y Tartaglia. Las matemáticas del renacimiento italiano. Nivola, 2000.

[25] NAGEL, E., NEWMAN, J. R., El teorema de Gödel. Tecnos,

1979.

[26] PARADÍS, J., MALET, A., Los orígenes del álgebra: de los árabes al Renacimiento. PPU, 1989.

[27] PARADÍS, J., MIRALLES DE I., J., MALET, A., Los orígenes del álgebra en el periodo renacentista: la recuperación de los clásicos griegos. PPU, 1989.

[28] PENROSE, R., La nueva mente del emperador. Debolsillo, 2006.

[29] PENROSE, R., El camino a la realidad. Debate, 2006.

[30] SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C., NORIEGA SÁNCHEZ, T., Abel. El romántico nórdico. Nivola, 2005.

[31] STEWART, I., The problems of mathematics. Oxford Univ. Press, 1992.

[32] STUBHAUG, A., Niels Henrik Abel and his time. Springer, 2000.

[33] SZPIRO, G. G., La vida secreta de los números. Como piensan y trabajan los matemáticos. Almuzara, 2009.

[34] TORRECILLAS JOVER, B., Fermat. El mago de los números. Nivola, 1999.

[35] VAN DER WAERDEN, B. L., A History of algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether. Springer, 1985.

Índice general

Discurso de contestación

Discurso de contestación

José Luis Bueso Montero
Académico Numerario de la Sección de Matemáticas

Excmo Sr. Presidente,
Excmos e Ilmos Sres. Académicos,
Sras. y Sres.

Es un honor para nuestra Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada recibir hoy como nuevo académico al Profesor D. Pascual Jara Martínez.

Honor añadido al placer es para mí llevar a cabo aquí ahora la contestación a su Discurso de Ingreso en esta Academia.

Pascual nació en Alcantarilla (Murcia) a muy temparana edad.

Conocí yo a Pascual junto a Josefa (su mujer), creo, como alumnos míos en una asignatura de quinto curso de la Licenciatura de Matemáticas durante el curso 1978-1979, carrera que cursó por culpa de las Olimpiadas Matemáticas, finalizando los estudios con la tesina de licenciatura "(G,n)-extensiones especiales en la cohomología de grupos" dirigida por el Prof. Rodríguez-Grandjean.

Después de dirigirle su tesis doctoral "Teorías de torsión: zócalo y radical" defendida en 1983, comenzamos una intensa época de colaboración y amistad.

Contando como hacen los cuervos, el número de trabajos publicados por el Prof. Jara, es uno, dos, tres y muchos, en revistas de reconocido prestigio internacional y director de nueve tesis doctorales.

Su investigación se puede clasificar en tres grupos:

- Anillos conmutativos. Una buena parte de sus esfuerzos han estado dirigidos a levantar la condición de noetherianidad, tanto a anillos como a esquemas, con el ojo puesto al estudio local de ambos conceptos.

- Anillos no conmutativos. Existen numerosos y fracasados intentos de desarrollar una geometría algebraica no conmutativa. En la mayoría de los casos el fracaso viene por una construcción del haz estructura carente de propiedades funtoriales. El Dr. Jara realiza con éxito, en una serie de trabajos, dicha construcción, ahora con propiedades funtoriales, para una familia suficientemente importante de anillos no conmutativos.

  A destacar, que también contribuye al desarrollo del cálculo efectivo en anillos de polinomios no conmutativos.

- Coálgebras. Álgebras de Hopf. Teoremas de estructura. Es su último campo de interés. Notables son sus aportaciones a las coálgeabras lisas y de caminos.

Es coautor de tres libros publicados en las editoriales Springer y Marcel Dekker. Entre otros méritos destacan

- Investigador principal en cinco proyectos del plan nacional

- Investigador principal del grupo de investigación "anillos y módulos"

- Investigador en otros proyectos y grupos de investigación

- Coordinador de la red nacional de Álgebra no conmutativa

- Organizador de varios congresos nacionales e internacionales en Álgebra y Teoría de Anillos

- Miembro de la Organización del Congreso Alhambra-2000 dentro del Año Mundial de la Matemática

Asímismo

- Director del Departamento de Álgebra de 2004 a 2012.
- Coordinador Sócrates, Erasmus y Séneca en la especialidad Matemáticas desde 1995
- Coordinador del Doctorado en Matemáticas (2000-2009) con las universidades de Almería, Cádiz, Granada, Jaén, y Málaga.
- Coordinador del Máster en Matemáticas (2007-2009) con las mismas universidadades.
- Miembro del Consejo Asesor de Doctorado (2009–)
- Miembro del Consejo de Dirección de GENIL (Granada Excellence Network of Innovation Laboratories) (2010–).
- Miembro del Consejo Editorial de la Editorial Universidad de Granada (2013–)

Pertenece Pascual a esa estirpe de profesores universitarios preocupados por la investigación pero sin descuidar las labores docentes.

Como decía D'Alembert "El Álgebra es generosa; con frecuencia da más de lo que se le pide ". Así el Prof. Jara, en sus pocos ratos libres y sacrificando sus fines de semana, es Coordinador Local de la Comisión de la Olimpiada Matemática Española y Coordinador para Andalucía Oriental del Proyecto ESTALMAT (Proyecto para la detección y el estímulo del talento precoz en Matemáticas).

Es habitual, los sábados, tropezarse en la Facultad al Prof. Jara rodeado de aspirantes a futuros matemáticos.

Comienza la exposición del Prof. Jara, recordando lo que significa la palabra "Ciencia". En este momento, donde surgen nuevas titulaciones que comienzan por "Ciencias de . . . ", me vienen a la memoria las palabras de "Leonardo da Vinci" quien aseguraba "Ninguna investigación humana se puede calificar como realmente científica si no puede ser demostrada matemáticamente".

En su discurso, Pascual Jara nos describe con amenidad y pleno de anécdotas el cambio significativo que supusieron "Los Elementos de Euclides", donde por primera vez aparecen demostraciones por reducción al absurdo, algoritmos y un sistema axiomático para la Geometría.

En el siguiente episodio nos narra como dos matemáticos de vidas muy cortas, Abel (murió a los 27 años) y Galois (murió con 21 años), revolucionan las matemáticas, haciendo intervenir, en el estudio de las raíces de una ecuación, una nueva estructura, el grupo.

Más adelante nos relata el proceso de formalización de las matemáticas. La falta de fundamentación de las nuevas teorías que van surgiendo, dan como resultado la aparición de paradojas algunas tan divertidas como la del barbero o la del bibliotecario. Ya que esta plaga de paradojas atacaba a la base de las matemáticas, Hilbert encabeza el proceso de formalización con objeto de aniquilar dicha plaga.

Finalmente, el Prof. Jara nos presenta a Nicolás Bourbaki. En contra de lo que algunos puedan pensar, no se trata de un matemático real, sino que es el seudónimo elegido por un grupo de matemáticos, la mayoría franceses, que inician la inmensa tarea de formalizar toda la matemática. Su influencia ha sido tal que los ha llevado a su práctica desaparición, puesto que casi la totalidad de los libros de matemáticas que se publican en la actualidad están imbuidos en sus ideas, haciendo innecesario que sean ellos quienes los escriban.

Como anécdota final, el patrón de Matemáticas de la Universidad de Valladolid es San Bourbaki y se celebra el último viernes del mes de noviembre de cada año.

La Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada, se enorgullece de incorporar a su nómina un matemático tan prestigioso como el Dr. D. Pascual Jara; sólo me resta darle la bienvenida, hacerle un lugar especial entre nosotros, pedirle que siga en su línea investigadora y docente, con nuestro deseo que sus éxitos continúen al menos al ritmo que hasta ahora han tenido.

Gracias a todos por su atención